Marzo-2022

Apuntes de la Escuela de Ingeniería

Programa de Inducción Académica: Matemáticas

PROFESORES DEL INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Gianfranco Liberona H.
David Salas
Emilio Vilches G.
Víctor Verdugo
Andrés Zúñiga M.

Universidad de O'Higgins

Aclaraciones sobre el apunte y agradecimientos

Este documento fue confeccionado como material de estudio para el curso de nivelación matemática de la Universidad de O'Higgins, sin fines de lucro. Los autores agradecen el trabajo de los profesores del Instituto de Ciencias de la Ingeniería, Pedro Pérez-A. y Cristóbal Quiñiñao, en el diseño del curso de nivelación, en su primera versión del año 2020.

Universidad de O'Higgins

Índice general

Capítulo 1

Números Enteros

Los números enteros están compuestos por los números naturales $(1, 2, 3, \ldots)$, por el cero (0), y por los números negativos $(-1, -2, -3, \ldots)$. Si bien este conjunto de números es de cierta manera el conjunto "elemental" del cálculo, fue desarrollado (o descubierto) en distintas regiones, a distintos tiempos y con distintas motivaciones. Por ejemplo, los números positivos (naturales) aparecen "naturalmente" en la historia de la humanidad, con el objetivo de contar objetos. Por otro lado, los números negativos estaban presentes en el 200 ACE en China, y aparecen en el 600 EC en India[1]. En ambos casos, la introducción de números negativos tiene una motivación económica, para representar deudas. En contraste, en occidente los números negativos tomaron mucho más tiempo en ser descubiertos, siendo tema de disputa aún en el sigo XVI [2].

1.1 Representación vectorial de números enteros

En esta sección, revisaremos una construcción moderna de los números enteros, conocida como vectorización: Entenderemos los números enteros como **flechas en la recta numérica**. Utilizaremos esta construcción para reinterpretar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división pero con un enfoque geométrico. Es decir, seremos capaces de dibujar estas operaciones.

Definición 1.1.1: Notación de Conjuntos

Denotamos el conjunto de los números naturales por el símbolo $\mathbb{N}$; es decir

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Denotamos el conjunto de los números enteros por el símbolo $\mathbb{Z}$; es decir

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Para decir que k es un número entero, escribiremos que "k pertenece al conjunto $\mathbb{Z}$" y esto se escribe

$$k \in \mathbb{Z}.$$

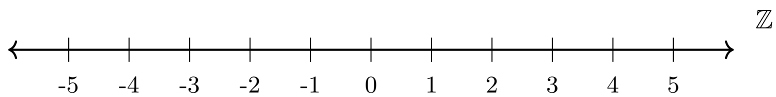
[1] EC: era común. ACE: Antes de la era común.

[2] Información obtenida del artículo *The history of negative numbers* de L. Rogers. url: https://nrich.maths.org/5961

En este capítulo, trabajaremos con el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$. Para representar un número entero gráficamente, utilizaremos lo que se conoce como la recta numérica.

Definición 1.1.2: Recta Numérica

La recta numérica es una línea bi-infinita (que no tiene fin) donde posicionamos los números enteros. Al centro (como punto de referencia) se ubica el cero (0), a la derecha los números positivos y a la izquiera los números negativos.



En la recta numérica, vamos a interpretar un número $k \in \mathbb{Z}$ como **la flecha que va desde el origen** 0 **hasta la posición** k. La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición 1.1.3: Números como vectores

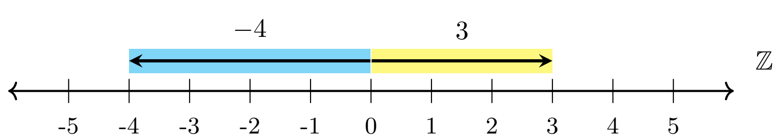
Un número entero $k \in \mathbb{Z}$ se define por su *magnitud* y su *signo*. Interpretamos entonces los números enteros como vectores (flechas) en la recta numérica:

- La magnitud de k se llama *valor absoluto*, se denota por $|k|$, y representa la distancia al 0 en la recta numérica. Equivalentemente, $|k|$ representa el tamaño del vector.
- El *signo* nos dice hacia adonde apunta k: signo positivo apunta hacia la derecha, y el signo negativo apunta hacia la izquierda.
- Por convención, 0 tiene signo positivo.

El siguiente ejemplo muestra cómo se aplica la definición de números como vectores.

Ejemplo 1.1.4

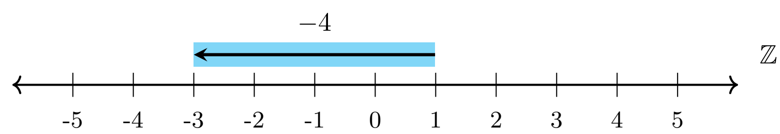
- El número 3 tiene valor absoluto $|3| = 3$ y signo positivo. Por lo tanto, se representa por la flecha de largo 3 que apunta a la derecha.
- El número -4 tiene valor absoluto $|-4| = 4$ y número negativo. Por lo tanto se representa por la flecha de largo 4 que apunta a la izquierda.



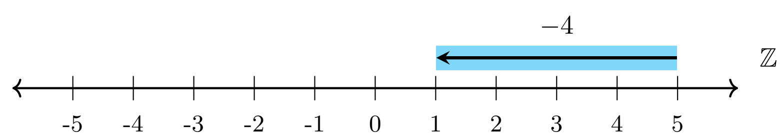
Una ventaja de interpretar los números enteros como vectores es que nos permite pensar en las operaciones geométricas de avanzar y retroceder, las cuales visualmente son fáciles de entender.

Ejemplo 1.1.5

- Avanzar en -4 desde el punto 1 corresponde a poner la cola de la flecha en 1 y dibujar el vector -4.



- Retroceder en -4 desde el punto 1 corresponde a poner la punta de la flecha en 1 y dibujar el vector -4.



1.2 Suma y resta de números enteros

El objetivo de esta sección es reconstruir las operaciones de suma y resta de números enteros operaciones en la recta numérica. El procedimiento que desarrollaremos consiste esencialmente concatenar flechas.

1.2.1. Suma

Definición 1.2.1: Suma de números enteros

En general, para sumar dos números enteros cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$, hacemos lo siguiente

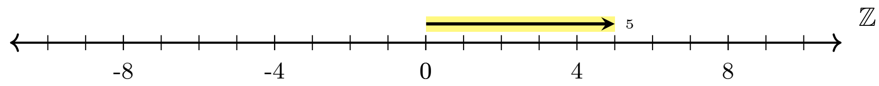
1. Se ubica el primer vector p partiendo de 0: *Se avanza* la cantidad p desde el cero.
2. Ponemos el segundo vector q partiendo desde el punto final de p: *Se avanza* la cantidad q desde p.
3. El vector $p+q$ es el vector resultante que va desde 0 al punto final del segundo vector; es decir, *se avanza* la cantidad $p+q$ desde 0.

En estos casos, "avanzar"significa *moverse hacia donde apunta la flecha del vector* (derecha si es positivo, izquierda si es negativo).

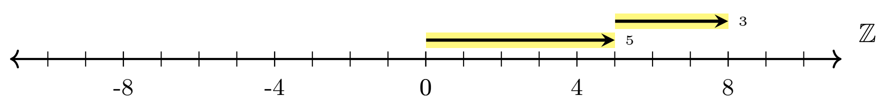
En el siguiente ejemplo, veremos cómo se aplica esta definición a la suma de dos números positivos, que sigue una idea bastante natural: avanzar en la recta numérica a través del primer vector y luego, desde donde llegamos, seguir avanzando a través del segundo.

Ejemplo 1.2.2

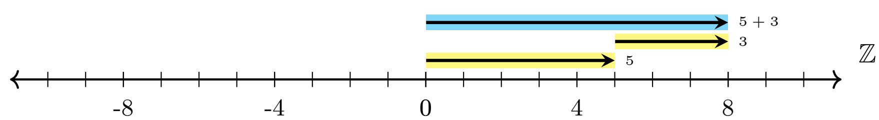
Efectuaremos la suma $5+3$. Primero ubicamos el vector 5 en la recta numérica, partiendo del origen 0:



Luego concatenamos el vector 3, partiendo de la posición obtenida al ubicar el vector 5:



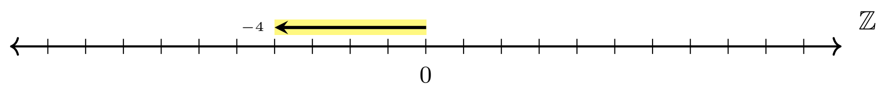
El vector $5+3$ está dado por el vector que parte del origen y llega a la posición final de destino obtenida con la concatenación de los vectores 5 y 3:



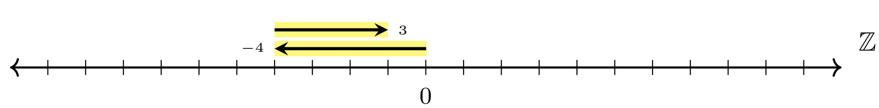
La idea anterior se extrapola a los números negativos de la misma forma. La única diferencia es que las flechas que representan los números negativos apuntan hacia la izquierda. Sin embargo, esto no cambia nada en la metodología de concatenar vectores, pues seguimos aplicando el mismo procedimiento de la Definición 1.2.1.

Ejemplo 1.2.3

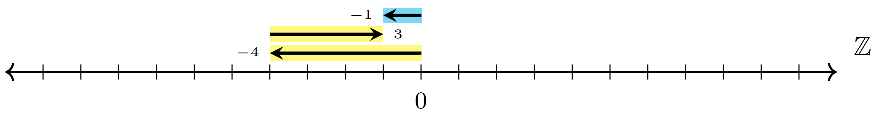
Efectuaremos la suma $(-4)+3$. Primero ubicamos el vector -4 en la recta numérica, partiendo del origen 0:



Luego concatenamos el vector 3, partiendo de la posición obtenida al ubicar el vector -4:



El vector $(-4) + 3$ está dado por el vector que parte del origen y llega a la posición final de destino obtenida con la concatenación de los vectores -4 y 3:



1.2.2. Resta

Definición 1.2.4: Resta de números enteros

En general, para sumar dos números enteros cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$, hacemos lo siguiente

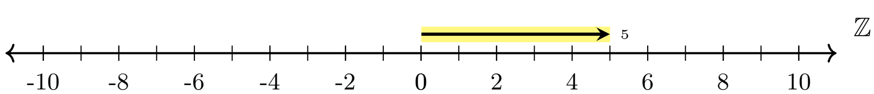
1. Se ubica el primer vector p partiendo de 0: Se avanza la cantidad p desde el cero.
2. Ponemos el segundo vector q *terminando* en el punto final de p: Se *retrocede* la cantidad q desde p.
3. El vector $p - q$ es el vector resultante que va desde 0 al punto *inicial* del segundo vector; es decir, se avanza la cantidad $p - q$ desde 0.

En estos casos, "retroceder"significa moverse en el sentido contrario del vector (hacia la derecha en el caso de los números negativos, o moverse hacia la izquierda en el caso de los números positivos).

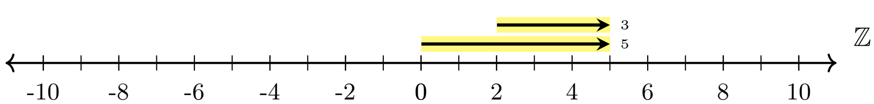
En el siguiente ejemplo, veremos cómo se aplica esta definición a la resta de dos números positivos, cuya idea nuevamente es intuitiva: avanzar en la recta numérica a través del primer vector y luego, desde donde llegamos, retroceder a través del segundo vector.

Ejemplo 1.2.5

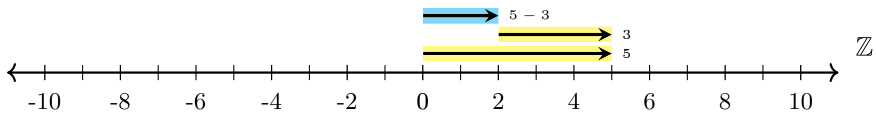
Calcularemos la resta $5 - 3$. Al igual que en la suma, primero posicionamos el vector 5 desde el origen 0:



Luego, posicionamos el segundo vector 3, pero **terminando** en el mismo punto final que 5. Esto nos hace "retroceder" en 3 desde la posición 5:



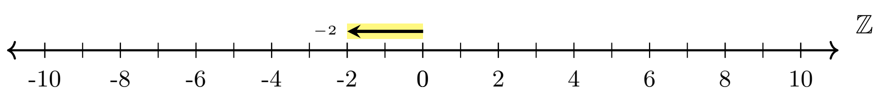
Finalmente, el resultado de $5-3$ está determinado por el vector que va desde 0 hasta el punto inicial del segundo vector:



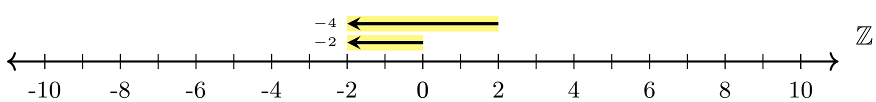
Nuevamente, el procedimiento de la Definición 1.2.4 se extrapola naturalmente a números negativos. En efecto, nuestra construcción de resta no necesita saber hacia donde apuntan los vectores: El primero se dibuja de cola a punta desde el 0 y el segundo se dibuja de punta a cola desde el punto de llegada del primer vector.

Ejemplo 1.2.6

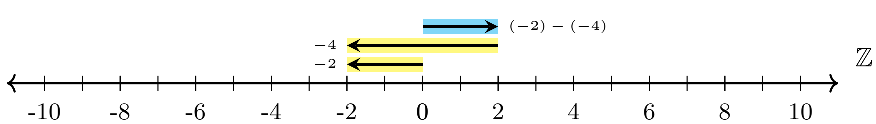
Calcularemos la resta $(-2)-(-4)$. Al igual que en el ejemplo anterior, primero posicionamos el vector -2 desde el origen 0:



Luego, posicionamos el segundo vector -4, pero **terminando** en el mismo punto final que -2. Esto nos hace "retroceder" en -4 desde la posición -2:



Finalmente, el resultado de $(-2)-(-4)$ está determinado por el vector que va desde 0 hasta el punto inicial del segundo vector:



1.2.3. Inverso aditivo

A partir de la operación de la suma, podemos definir lo que se conoce como inverso aditivo de un número entero.

Definición 1.2.7: Inverso aditivo

El inverso aditivo de un número entero $k \in \mathbb{Z}$ es aquel número (denotado por $-k$) que sumado con k da 0. En símbolos matemáticos:

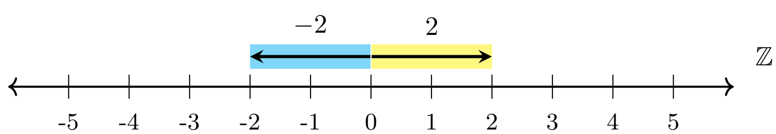
$$k + (-k) = 0.$$

El inverso aditivo de k corresponde al número entero que posee el mismo valor absoluto que k pero tiene signo opuesto. De allí proviene la notación $-k$ para el inverso aditivo de k. En particular, $-k$ es único, lo cual quiere decir que k no posee más de un inverso aditivo.

Visto como vector, el inverso aditivo de k es aquel vector del mismo tamaño $|k|$ que apunta en la dirección contraria.

Ejemplo 1.2.8

El inverso aditivo de 2 es el vector -2.



Una de las propiedades más útiles del inverso aditivo es que nos permite reinterpretar la resta: Restar un número es equivalente a sumar su inverso aditivo.

Teorema 1.2.9: Resta como suma de inverso

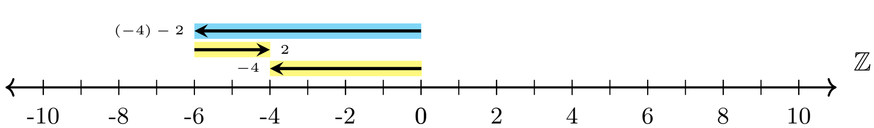
La operación de restar dos números enteros $p, q \in \mathbb{Z}$, digamos $p - q$, es equivalente que la operación de sumar el primer número p con el inverso aditivo del segundo número q. En símbolos matemáticos, lo anterior se escribe como

$$p - q = p + (-q).$$

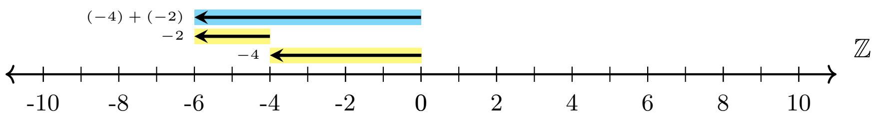
Terminaremos esta sección trabajando un ejemplo de cómo aplicar el teorema anterior.

Ejemplo 1.2.10

Estudiemos visualmente las igualdades $(-4) - 2 = (-4) + (-2) = -6$. Primero, al representar la resta $(-4) - 2$, posicionamos la punta del vector 2 en la punta del vector -4 (retrocedemos 2 desde -4). El vector que va desde 0 hasta el inicio del vector 2 entrega -6.



Por otro lado, al representar la suma $(-4) + (-2)$ posicionamos el inicio del vector -2 en la punta del vector -4 (avanzamos -2 desde -4). El vector que va desde 0 hasta la punta del segundo vector arroja el mismo resultado, -6.



1.3 Multiplicación y división de números enteros

Para trabajar la multiplicación y división en la recta entera, haremos una interpretación mixta de los números involucrados: En la multiplicación, un factor representará un vector que queremos repetir, mientras que el otro factor será el número de repeticiones. El resultado de la multiplicación será el vector que se obtiene de sumar repetidas veces el primer factor. La división, en contraste, involucra dos vectores, pero el resultado será el número de repeticiones que necesitamos para obtener el dividendo repitiendo el divisor.

1.3.1. Multiplicación

Sabemos bien que multiplicar es la operación que consiste en "sumar varias vecesün mismo número. En general, uno de los factores es el número a repetir y el otro es cuantas veces lo repetimos.

En nuestro desarrollo en la recta numérica, haremos exactamente lo mismo: La multiplicación será "sumar varias vecesün mismo vector.

Definición 1.3.1: Multiplicación de números enteros

Para multiplicar dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$, separamos en tres casos:

1. Si q es positivo, el vector p avanza $|q|$ veces.
2. Si q es negativo, el vector p retrocede $|q|$ veces.
3. Si q es 0, entonces no nos movemos y nos quedamos en 0.

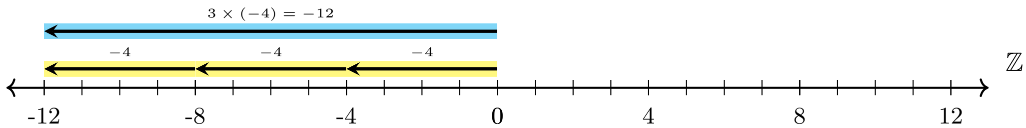
El valor absoluto $|q|$ nos dice cuantas veces repetimos el vector p, mientras que el signo nos dice hacia adonde (avanzar o retroceder).

El resultado $p \times q$ (o alternativamente pq) es el vector que va desde 0 hasta el punto donde llegamos avanzando o retrocediendo.

En la definición anterior, el primer factor representa el vector que vamos a repetir, mientras que el segundo factor representa la cantidad de repeticiones.

Ejemplo 1.3.2

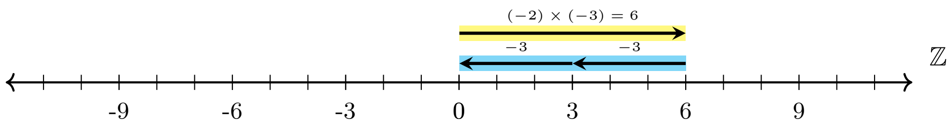
Estudiemos la operación $(-4) \times 3$. Tradicionalmente, esta operación sería sumar 3 veces el número -4. Multiplicar $(-4) \times 3$ lo podemos interpretar como que el vector (-4) avanza 3 veces.



Para interpretar la operación "repetir una cantidad negativa de veces" un vector, hacemos lo siguiente: cuando el número de repeticiones es positivo, repetimos el vector avanzado. En cambio, cuando el número de repeticiones es negativo, repetimos el vector retrocediendo.

Ejemplo 1.3.3

Estudiemos la operación $(-3) \times (-2)$. La multiplicación $(-3) \times (-2)$ sería que el vector -3 retroceda 2 veces, de modo de obtener 6 como resultado final.



Es importante notar que multiplicar un entero $p \in \mathbb{Z}$ por -1 nos entrega el inverso aditivo de p.

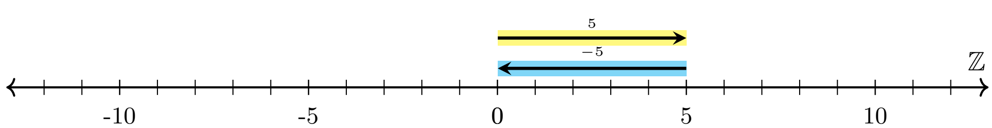
Teorema 1.3.4

Al efectuar la multiplicación de un entero $p \in \mathbb{Z}$ por -1 se obtiene el inverso aditivo de p. Esto se debe ya que multiplicar p por -1 equivale a avanzar $|p|$ unidades en la dirección opuesta a p. En general, escribimos

$$-p = (-1) \times p$$

Ejemplo 1.3.5

si tomamos -5 y lo multiplicamos por -1 obtenemos un vector que se representa como retroceder una vez el vector -5. Esto resulta en el vector 5.



1.3.2. División

Sabemos bien que dividir es la operación inversa de multiplicar. Pero, ¿cómo la interpretamos en nuestra representación de vectores?

Para dividir dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$, lo cual se anota comúnmente como $p \div q$, lo que nos preguntaremos será: ¿cuántas veces tengo que avanzar o retroceder en el vector q para formar el vector p?

Definición 1.3.6: Multiplicación de números enteros

Para dividir dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, digamos $p \div q$, nos separamos en tres casos:

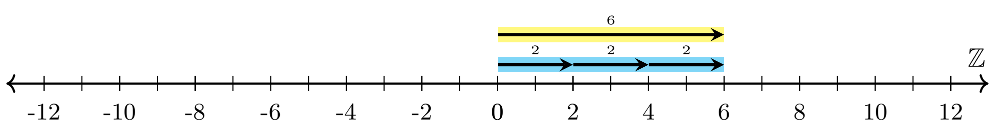
1. Si $p = 0$, el resultado es 0: necesitamos repetir 0 veces q
2. Intentamos repetir el vector q avanzando, es decir, dibujándolo de cola a punta. Si logramos recuperar el vector p, entonces el resultado es el número de repeticiones que hicimos, con signo positivo.
3. Intentamos repetir el vector q retrocediendo, es decir, dibujándolo de punta a cola. Si logramos recuperar el vector p, entonces el resultado es el número de repeticiones que hicimos, con signo negativo.

En caso que ninguna de las alternativas anteriores funcione, entonces p no es divisible por q.

El resultado $p \div q$ indica el número de repeticiones que necesitamos para obtener el vector p, repitiendo el vector q.

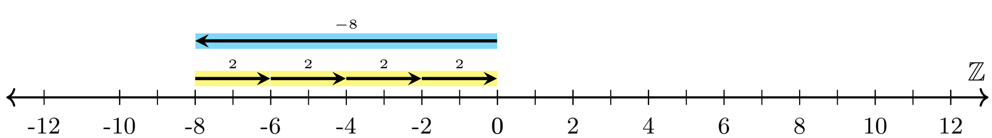
Ejemplo 1.3.7

Para efectuar la división $6 \div 2$, ponemos primero el vector 6, y luego contamos cuántas veces puede ser repetido el vector 2 para llegar a 6. En este caso hay que avanzar 3 veces, y escribimos $6 \div 2 = 3$.



Ejemplo 1.3.8

Para calcular $(-8) \div 2$ ubicamos al vector -8 en la recta real, y luego repetimos el vector 2 hasta cubrir -8 completamente (partiendo desde 0). En este caso hay que retroceder 4 veces, por lo que el resultado es -4. Así, $(-8) \div 2 = -4$.



1.3.3. Regla de los signos

Definición 1.3.9: Función signo

Para un entero $p \in \mathbb{Z}$, definimos su signo como el número 1 si p es positivo, y como -1 cuando p es negativo. Esta definición se resume en simbología matemática mediante

$$\text{signo}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq 0, \\ -1 & \text{si } p < 0. \end{cases}$$

De este modo, de acuerdo con la definición anterior, $\text{signo}(5) = 5$, y además $\text{signo}(-2022) = 2022$.

La utilidad de introducir el signo de un número entero, es que podemos reducir las operaciones entre cualquier par de enteros de multiplicación y división, al caso en que ambos números fueran positivos.

Teorema 1.3.10: Regla de signos

En general, dados dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ cualquiera, se tiene que

$$p \times q = [\text{signo}(p) \times \text{signo}(q)] \times |p| \times |q|.$$
$$p \div q = [\text{signo}(p) \times \text{signo}(q)] \times |p| \div |q|.$$

Por supuesto, en el caso de $p \div q$, es necesario que $q \neq 0$.

Esta regla es consistente con la interpretación de vectores y nos permite trabajar de manera más directa. La regla de signos se puede resumir en la siguiente tabla:

Signo primer número	Signo segundo número	Signo resultado
$+$	$+$	$+$
$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$+$

Ejemplo 1.3.11

Los siguientes casos son multiplicaciones hechas con regla de signos:

$$(-2) \times (-5) = [-1 \times -1] \times 2 \times 5 = 1 \times 10 = 10,$$

$$12 \div (-6) = [1 \times -1] \times 12 \div 6 = -1 \times 2 = -2,$$

$$3 \times 7 = [1 \times 1] \times 3 \times 7 = 1 \times 21 = 21.$$

Capítulo 2

Divisores y Múltiplos

En este capítulo, estudiaremos el concepto de divisores. Este concepto nos ayuda en una tarea bastante natural, que es agrupar. Cuando queremos agrupar una cierta cantidad de unidades, necesitamos que la cantidad de grupos divida exactamente al número de unidades que tenemos. De lo contrario, nos quedarán unidades sin grupo o un último grupo de tamaño más pequeño.

A partir de esta idea fundamental, estudiaremos otros dos conceptos relacionados: los números primos y los múltiplos. En el resto de este capítulo, solo trabajaremos con números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. La razón es que cuando se quiere estudiar divisores y los conceptos relacionados para números enteros $k \in \mathbb{Z}$ (posiblemente negativos), lo que hacemos es simplemente trabajar con el valor absoluto, es decir, miramos los divisores de $|k|$ que es un número natural.

2.1 Divisores

Comencemos con la definición formal de divisor:

Definición 2.1.1: Divisores

Decimos que un número natural $a \in \mathbb{N}$ es divisor de un número $n \in \mathbb{N}$, o equivalente que a divide a n, cuando existe un número natural $b \in \mathbb{N}$ tal que

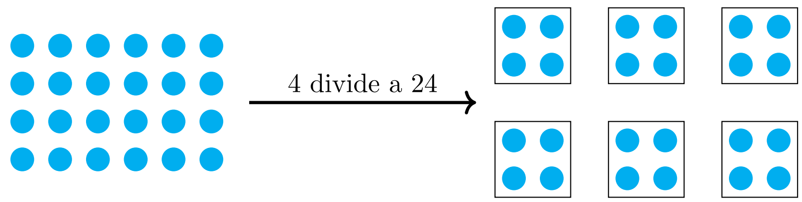
$$n = a \times b$$

Dicho de otro modo, a es divisor de n cuando n puede escribirse como la multiplicación de a con otro número, que en este caso denotamos por b.

Notemos que, si tengo dos números naturales $a, n \in \mathbb{N}$, que a sea divisor de n significa que puedo agrupar n unidades en subgrupos de tamaño a. El siguiente ejemplo muestra esta interpretación.

Ejemplo 2.1.2

Notemos que $a = 4$ divide a $n = 24$, ya que se pueden agrupar 24 unidades en $b = 6$ grupos de 4 unidades (cada uno). Esto se puede apreciar en el siguiente diagrama:



El siguiente ejemplo muestra otros ejemplos de divisores.

Ejemplo 2.1.3

- 9 es divisor de 45, pues $45 = 9 \times 5$. Es decir, puede agrupar 45 unidades en $(b = 5)$ grupos de tamaño 9.
- 10 es divisor de 100, pues $100 = 10 \times 10$. Es decir, se pueden agrupar 100 unidades en $(b = 10)$ grupos de tamaño 10.
- 5 **no es** divisor de 21, pues no existe ningún número natural $b \in \mathbb{N}$ de modo que $21 = 5 \times b$. Es decir, no es posible agrupar 21 unidades en grupos de tamaño 5.

Es posible usar la división de números enteros para verificar divisores.

Teorema 2.1.4

Dados dos números naturales $a, n \in \mathbb{N}$ tenemos que a divide a n si y sólo si el resultado de la división $n \div a$ es también un número natural. Esto es consecuencia de la relación siguiente

$$n = a \times \underbrace{(n \div a)}_{b}.$$

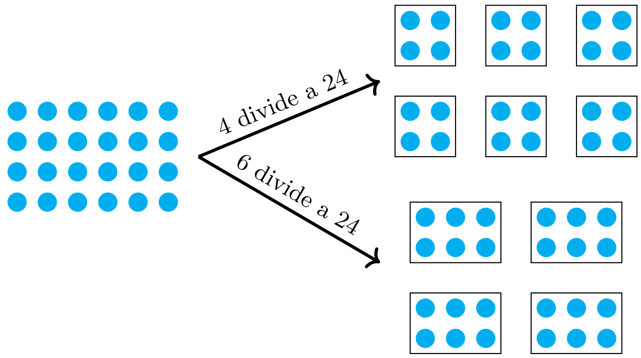
Más aún, se tiene que si a es divisor de n, entonces $b = n \div a$ también es divisor de n.

Retomemos el Ejemplo 2.1.2 ocupando el teorema anterior.

Ejemplo 2.1.5

Observemos que 24 se puede agrupar en 6 subgrupos de 4 unidades. Así, podemos escribir $24 = 4 \times 6$. De este modo 4 es divisor de 4, donde $24 \div 4 = 6$.

De lo anterior, se desprende que 6 también divide a 24, pues podemos escribir $24 = 6 \times 4$. Visualmente, esto corresponde a reagrupar 24 en 4 subgrupos de 6 unidades.



¿Cómo calcular todos los divisores de un número? Para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, podemos calcular todos los divisores de la siguiente manera:

1. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ calculamos $n \div k$.
2. Si $n \div k$ es un entero, entonces k es divisor de n.
3. Si $n \div k$ no es entero, entonces lo descartamos.

Este proceso puede ser tedioso cuando $n \in \mathbb{N}$ es grande, sin embargo, siempre funciona. Una forma más eficiente de este método es ir anotando los divisores de menor a mayor, y simultáneamente de mayor a menor, y parar cuando se llega a un punto en común.

Ejemplo 2.1.6

Los divisores de 30 se pueden estudiar, usando la observación anterior, mediante la siguiente secuencia de pasos:

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & \rightarrow & & & & & \leftarrow & 30. \\
1, & 2, & \rightarrow & & & \leftarrow & 15, & 30. \\
1, & 2, & 3, & \rightarrow & \leftarrow & 10, & 15, & 30. \\
1, & 2, & 3, & 5, & 6, & 10, & 15, & 30.
\end{array}$$

Ejemplo 2.1.7

Para encontrar todos los divisores de 21 tenemos que probar todos los números entre 1 y 21. Se puede comprobar que

1. Los divisores de 21 son $\{1, 3, 7, 21\}$.
2. El resto de los números $\{2, 4, 6, 8, \dots, 19, 20\}$ no dividen a 21.

Ejemplo 2.1.8

Para encontrar los divisores de 13 tenemos que probar con todos los números entre 1 y 13. Para ello notamos que

1. Los divisores de 13 son $\{1, 13\}$.
2. El resto de los números $\{2, 3, 4, \ldots, 11, 12\}$ no dividen a 13.

Como se ha podido observar en los ejemplos anteriores, todo número natural $n \in \mathbb{N}$ mayor que 1, tiene al menos dos divisores: 1 y n. Sin embargo, existen números (como el 13, en el Ejemplo 2.1.8) que no tienen ningún otro.

Definición 2.1.9: Números Primos

Un número primo $p \in \mathbb{N}$ es cualquier número natural mayor que 1 que sólo es divisible por 1 y por si mismo. En otras palabras, $p \in \mathbb{N}$ es primo cuando sus divisores son exactamente 1 y p.

Cómo veremos en la siguiente sección, los números primos son los bloques fundamentales que nos permiten construir todos los números naturales. El siguiente diagrama muestra cuáles son los números primos menores que 100.

0									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 2.1: **Rojo:** Números primos. **Verde:** números compuestos. Los números 0 y 1 son casos especiales.

2.2 Descomposición prima

La técnica que estudiaremos en esta sección, llamada descomposición prima, está basada en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1: Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural $n \in \mathbb{N}$ mayor a 1 se puede escribir como la multiplicación de números primos (admitiendo repeticiones):

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$$

Esta forma de escribir n se denomina su descomposición prima.

Veremos que la descomposición prima de un número natural nos permite calcular rápidamente sus divisores. Más aún, también es útil para calcular divisores y múltiplos comunes, y simplificar fracciones. Todos estos temas los desarrollaremos más adelante en este apunte.

Ejemplo 2.2.2

Las siguientes son descomposiciones primas:

1. $15 = 3 \cdot 5$.
2. $17 = 17$ (17 es primo, así que es sólo un número)
3. $40 = 5 \cdot 8 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 5$ (cuando hay repeticiones ocupamos exponentes)

¿Cómo encontrar la descomposición prima de un número? Presentaremos dos técnicas que nos permiten encontrar la descomposición prima de un número n.

Definición 2.2.3: Descomposición prima: Por tabla

La descomposición prima de un número natural $n \in \mathbb{N}$ mayor a 1 puede obtenerse de la siguiente manera:

1. Buscamos un número primo p entre 2 y n (inclusive) que sea divisor de n.
2. Guardamos en una tabla el número p, y calculamos $k = n \div p$.
3. Si k es igual a 1, terminamos. Si k es mayor a 1, repetimos el proceso anterior reemplazando n por k.

El producto de todos los números primos guardados (paso 2) entrega la descomposición prima de n.

El siguiente ejemplo muestra como se aplica la técnica de tabla para la descomposición prima.

Ejemplo 2.2.4

Descomposión prima de 56.

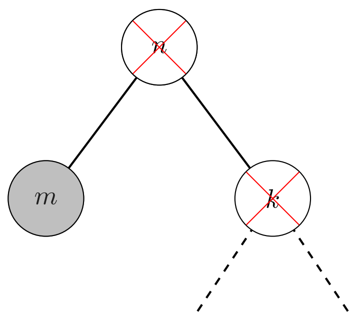
Número que estamos dividiendo	Número primo divisor
56	2
28	2
14	2
7	7
1	FIN

De este modo, la descomposición prima de 56 corresponde a

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$$

Definición 2.2.5: Descomposición prima: Diagrama de árbol

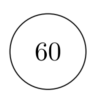
1. Dibujamos un círculo al rededor del número $n \in \mathbb{N}$. Si n es primo, pintamos en círculo.
2. Si n no es primo, buscamos una descomposición de n, de la forma $n = m \times k$. Encerramos k y m en círculos.
3. Dibujamos dos líneas conectando los círculos, una entre n y k, y otra entre n y m.
4. Marcamos n como finalizado.
5. Repetimos el proceso para cada uno de los círculos no marcados. Si todos los círculos están marcados o pintados, entonces la descomposición prima está dada por los círculos pintados.



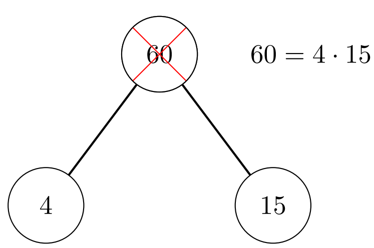
Ejemplo 2.2.6

Estudiando la descomposición prima de 60.

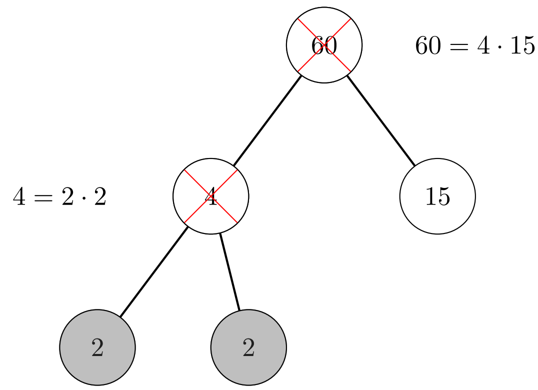
- Comenzamos con el círculo de 60:



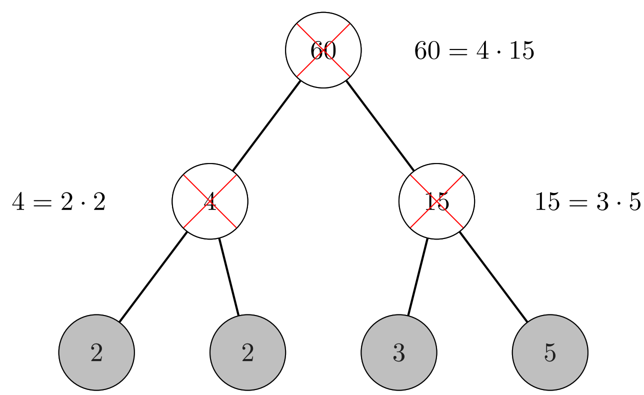
- Como 60 no es primo, descomponemos $60 = 4 \cdot 15$ y marcamos 60 como finalizado:



- Pasamos al círculo de 4, que no está finalizado ni pintado. Como 4 no es primo, descomponemos $4 = 2 \cdot 2$ y marcamos 4 como finalizado. Como 2 es primo, pintamos estos nuevos círculos:



- Pasamos al círculo de 15, que no está finalizado ni pintado. Como 15 no es primo, descomponemos $15 = 3 \cdot 5$ y marcamos 15 como finalizado. Como 3 y 5 son primos, pintamos estos nuevos círculos:



- Como todos los círculos están finalizados o pintados, terminamos. La descomposición prima de 60 es entonces el producto de todos los círculos pintados:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

2.3 Divisores comunes y máximo común divisor (m.c.d.)

En muchos problemas, estamos interesados en dividir pro el mismo divisor una lista de números naturales. Por ejemplo, si queremos dividir en subgrupos del mismo tamaño varios grupos de unidades. También esto es lo que hacemos cuando simplificamos fracciones: dividimos por un mismo número el dividendo y el divisor.

Definición 2.3.1: Divisores comunes

Dado un conjunto S de números naturales, digamos,

$$S = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$$

decimos que un número natural a es *divisor común de* S, si a es divisor de cada uno de los números del conjunto S. Es decir, si

$$\begin{array}{ccc} a & \text{es divisor de} & n_1 \\ a & \text{es divisor de} & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \text{es divisor de} & n_k \end{array}$$

En los siguientes ejemplos, vemos que son los divisores comunes de algunos conjuntos de números.

Ejemplo 2.3.2

Divisores comunes del conjunto $\{28, 100\}$.

1. Divisores de 28: $1, 2, 4, 7, 14, 28$.
2. Divisores de 100: $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$.

Por lo tanto, los divisores comunes del conjunto son 1, 2, y 4.

Ejemplo 2.3.3

Divisores comunes del conjunto $\{20, 30, 45\}$.

1. Divisores de 20: $1, 2, 4, 5, 10, 20$.
2. Divisores de 30: $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$.
3. Divisores de 45: $1, 3, 5, 9, 15, 45$.

Por lo tanto, los divisores comunes del conjunto son 1 y 5.

Como anunciamos, los divisores comunes son útiles en problemas de agrupación. El siguiente ejemplo, muestra un problema de este tipo.

Ejemplo 2.3.4

Supongamos que una compañía hace cajas para empaquetar tornillos y provee a dos productores de tornillos. El primer productor produce 200 tornillos al día. l segundo productor produce

300 tornillos al día.

¿De qué tamaño pueden ser las cajas (en números de tornillos que caben) para que ambos productores puedan empaquetar todos los tornillos que produceen un día sin que sobre espacio?

Solución. Si en la caja caben n tornillos, para que ambos productores puedan empaquetar su producción, necesitamos que n sea divisor de 300 y de 200.

Calculando los divisores de 300 obtenemos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300$$

y los divisores de 200 son

$$1, 2, 4, 5, 10, 20, 40, 50, 100, 200.$$

Por ende, los divisores comunes son $1, 2, 4, 5, 10, 20, 50, 100$. Por lo tanto, las cajas pueden ser de $1, 2, 4, 5, 10, 20, 50$ o 100 tornillos. □

Todo conjunto $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ tiene al menos un común divisor, el número 1. Este, por supuesto, es el divisor más pequeño. Una pregunta natural es, entonces, cuál es el divisor más grande.

Definición 2.3.5: Máximo común divisor

El divisor más grande de un conjunto S se denomina **máximo común divisor (m.c.d).**

Ejemplo 2.3.6

Los divisores comunes del conjunto $S = \{200, 300\}$ son 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 50, y 100. De este modo, el máximo común divisor es 100.

Calculando el m.c.d. usando descomposición prima. Si bien podemos calcular el máximo común divisor de un conjunto S enlistando todos los divisores comunes de S y seleccionando el más grande, muchas veces esto puede ser tedioso.

Otro método consiste en usar la descomposición prima.

1. Para $S = \{n_1, \ldots, n_k\}$ anotamos la descomposición prima cada número en S.
2. **Guardamos todos los números primos que se repiten**. Si algun número primo en las descomposiciones tiene exponente, lo guardamos con el **exponente más pequeño**.
3. El m.c.d. es el producto de todos los números primos que guardamos, elevados a los exponentes que guardamos.

Ejemplo 2.3.7

Calculando el m.c.d. de $S = \{200, 300\}$ usando descomposición prima.

Primero calculamos las descomposiciones primas de los elementos del conjunto:

Número	Divisor
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	FIN.

Número	Divisor
300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	FIN.

El máximo común divisor de S está dado por

$$m.c.d.\{200, 300\} = 2^2 \cdot 5^2 = 100.$$

2.4 Múltiplos comunes y mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El concepto de múltiplo es recíproco al concepto de divisor, como se muestra a continuación.

Definición 2.4.1: Múltiplo común

Para dos números naturales $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$, decimos que n es múltiplo de a cuando existe un número natural $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$n = a \times b$$

En otras palabras, n es múltiplo de a cuando n se obtiene mediante la multiplicación de a con algún número natural (que escribimos b). Notamos inmediatamente la siguiente equivalencia:

$$a \text{ es divisor de } n \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \text{ es múltiplo de } a.$$

El conjunto de los múlitplos de un número natural a está dado por

$$\{a, 2a, 3a, 4a, \ldots\}$$

que denotaremos por $\mathcal{M}(a)$. Es importante destacar que siempre $\mathcal{M}(a)$ tiene infinitos elementos.

Definición 2.4.2

Decimos que un número natural n es múltiplo común del conjunto

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{N}$$

cuando es múltiplo de cada uno de los números del conjunto S. Es decir, si

$$\begin{array}{c} n \text{ es múltiplo de } a_1 \\ n \text{ es múltiplo de } a_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ n \text{ es múltiplo de } a_k \end{array}$$

Los múlitplos comunes de cualquier conjunto S son infinitos, y siempre hay uno que es fácil de calcular:

$$n = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_k$$

La infinidad de múltiplos comunes se puede justificar rápidamente: si n es múltiplo común de S, entonces también lo son $2n, 3n, 4n, 5n, \ldots$ etc.

Definición 2.4.3: Mínimo Común Múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.). de un conjunto S es el múltiplo común más pequeño.

Calculando el m.c.m. usando descomposición prima. Si bien podemos calcular el mínimo común múlitplo de un conjunto S enlistando todos los múlitples comunes de S y seleccionando el más pequeño, muchas veces esto puede ser tedioso.

Otro método consiste en usar la descomposición prima.

1. Para $S = \{n_1, \ldots, n_k\}$ anotamos la descomposición prima cada número en S.
2. **Guardamos todos los números primos que aparecen en alguna de ellas**. Si algun número primo en las descomposiciones tiene exponente, lo guardamos con el **exponente más grande**.
3. El m.c.m. es el producto de todos los números primos que guardamos, elevados a los exponentes que guardamos.

Ejemplo 2.4.4

Calculando el m.c.d. de $S = \{120, 48\}$ usando descomposición prima.

Primero calculamos las descomposiciones primas de los elementos del conjunto:

Número	Divisor
120	2
60	2
30	2
15	5
3	3
1	FIN.

Número	Divisor
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	FIN.

El mínimo común múltiplo está dado por

$$m.c.m\{120, 48\} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Problema de Modelamiento 2.4.1. *Como nuevo miembro de la Universidad, usted desea realizar una fiesta para sus compañeros del PIA, y ha decidido preparar completos. Para eso, usted va al supermercado y observa que las vienesas se venden en paquetes de 20 unidades, mientras que el pan de completo se vende en paquetes de 6 unidades.*

¿Cuál es la mínima cantidad de completos que puede preparar sin que sobre ninguna vienesa ni ningún pan?

Solución. Supongamos que usted compra n completos. Entonces, n debe ser múltiplo de 20, ya que de otro modo sobrarían vienesas. Además, n debe ser múltiplo de 6, pues no puede sobrar pan. De este modo, n debe ser el mínimo común múltiplo de 20 y 6.

Calculando las descomposiciones primas de estos números obtenemos:

$$20 = 2^2 \cdot 5,$$
$$6 = 2 \cdot 3.$$

y entonces el mínimo común múltiplo corresponde a

$$m.c.m\{20, 6\} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Por lo tanto, la cantidad mínima completos que puede preparar es 60. $\square$

Ejercicios Capítulo 1

P1. Calcula el resultado de las siguientes operaciones, usando adecuadamente las reglas de signos cuando corresponda.

a) $24 + (-15)$

b) $-(-4) + 7$

c) $125 : (-5)$

d) $3 - (-4)$

e) $(-27) \cdot 5$

f) $(-9) : (-3)$

g) $57 - (-19)$

h) $(-22) + (-13)$

i) $(-7) \cdot 8$

j) $24 \cdot (-8)$

k) $133 : 7$

l) $(-133) : (-7)$

P2. Obtén la descomposición prima de los siguientes números.

a) 35.

b) 140.

c) 235.

d) 210.

e) 12345.

f) 673.

P3. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes grupos de números.

a) 8 y 24.

b) 7 y 35.

c) 9, 18 y 45.

d) 21 y 12.

e) 17, 19 y 23.

f) 1 y 2134.

P4. La profesora Rosa quiere comprar lápices de colores verde y morado para las y los estudiantes que participan en sus cursos. Los lápices verdes vienen en cajas de 15 unidades, mientras que los morados van en cajas de 8. ¿Cuál es el mínimo número de cajas de cada color que debe comprar para tener el mismo número de lápices de ambos colores?

P5. María recibió para San Valentín 15 rosas rojas y 21 jazmines, y quiere ubicarlas en distintos floreros en varios lugares de su casa, de modo que cada florero tenga el mismo número de rosas y el mismo número de jazmines y que éstos sean el máximo número posible.

a) ¿Cuántos floreros necesita Mariola?

b) ¿Cuántas flores de cada tipo debe poner en cada florero?

P6. José y Daniela van a correr alrededor de una de las canchas centrales del Complejo Deportivo Patricio Mekis en Rancagua. Daniela tarda 16 minutos en dar una vuelta completa y José tarda 24 minutos en hacer lo propio.

a) Si comienzan a correr al mismo tiempo, ¿cuándo coincidirán en la partida nuevamente?

b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese momento?

Capítulo 3

Números decimales y fracciones

3.1 Fracciones

Una fracción es el cuociente o división entre dos números enteros. ¿De dónde surge el concepto de fracción? Existen dos formas naturales de interpretar fracciones:

I. Las fracciones como parte de un todo. Una fracción se puede interpretar como la relación entre una parte y un todo, donde "el todo" es considerado como una unidad.

Ejemplo 3.1.1

La fracción $\frac{1}{2}$ puede representar: la mitad de un vaso de agua, o la mitad de una docena de huevos, o la mitad de dos metros, etc.

Para ejemplificar el concepto fracción, podemos pensar que una barra de chocolate representa la unidad (o el todo).

Figura 3.1: Fracciones en una barra de chocolate

En este contexto, la cantidad correspondiente a *un trozo* de la barra de chocolate de la Figura 3.1 se representa con la fracción 1/6.

Ejemplo 3.1.2: Las fracciones como parte de un todo - parte I

Observe, ahora, la barra de chocolate de la Figura 3.2 (ver abajo). Utilizando la interpretación de fracción como "partes de un todo", se pide

Figura 3.2: Interpretación de fracción en una barra de chocolate

- escribir la fracción correspondiente a: (i) 1 trozo de chocolate, (ii) 5 trozos de chocolate,
- ¿A cuántos trozos de chocolate corresponde media barra?

Figura 3.3: Interpretación de fracción en una barra de chocolate

Ejemplo 3.1.3: Las fracciones como parte de un todo - parte II

Suponga que se debe repartir la barra de chocolate de la Figura 3.3 (ver arriba) entre Pedro, Daniela y Camila.

1. Escriba la fracción que le corresponde a cada uno.
2. Si Pedro se come la parte de Daniela, ¿cuántos trozos se comió Pedro?, ¿cuál es la fracción correspondiente?

En general, cuando una unidad ha sido dividida en n partes iguales y queremos referirnos a m de esas partes, escribiremos

$$\frac{m}{n}$$

para señalar la fracción correspondiente. En este contexto, m se llama el numerador de la fracción (las partes), y n se llama el denominador de la fracción (todo).

La interpretación de fracciones como "partes de un todo" permite utilizar muchas representaciones gráficas para entenderlas. Para ello, debemos expresar claramente cuales son las partes y el todo. A partir de ellas se contruye la fracción correspondiente.

A continuación se muestran distintas formas gráficas de representar fracciones.

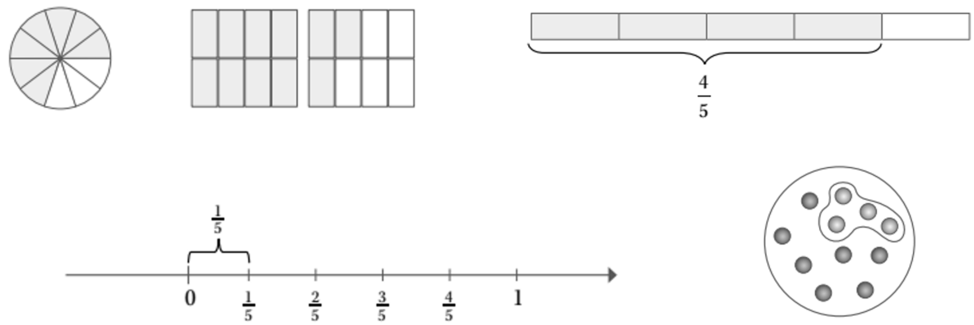


Figura 3.4: Diversas reresentaciones de una fracción

A pesar de las ventajas de visualización que permite la interpretación de fracciones "partes de un todo", existen ciertas dificultades y limitaciones inherentes a esta definición. Primeramente, el concepto de fracción depende del patrón de medida; esto es, cuán grande son las medidas absolutas de los objetos que prentende comparar. Otra dificultad yace en la "ambiguedad" en la unidad considerada al momento de medir.

Ambas problemáticas son reflejadas en los siguientes casos de estudio:

Ejemplo 3.1.4

1. Pedro y Daniela fueron un día a un restaurant y comsumieron 1/3 de pizza cada uno. ¿Consumieron la misma cantidad de pizza?
2. Camila y Gonzalo discuten sobre la fracción que representa la Figura 3.5

   Por un lado, Camila asevera que la figura representa 3/4, mientras que Gonzalo asegura que corresponde a 6/4. ¿Quién tiene la razón?

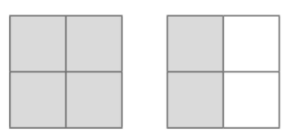


Figura 3.5: Dificultades en la interpretación de fracción.

II. Las fracciones como cuociente, o reparto equitativo. En diversas situaciones de la vida cotidiana surgen instancias en donde se puede repartir (o dividir) equitativamente objetos que son fraccionables, realizando el reparto de todos los objetos *sin dejar un resto*. En estos casos, las fracciones nos permiten describir de manera precisa cómo se llevan a cabo estas reparticiones.

Ejemplo 3.1.5

Suponga que queremos repartir equitativamente la barra de chocolate presentada a continuación en la Figura 3.6 entre Pedro, Daniela y Camila.

1. ¿Cuántos trozos le corresponde a cada uno?

2. De igual manera, si la barra se reparte entre Daniela y Camila, ¿cuántos trozos le corresponde a cada una?

Figura 3.6: Repartición de una barra de chocolate

Como acabamos de ver, una forma alternativa de interpretar fracciones es como un *cuociente o reparto equitativo*. En este contexto, la fracción

$$\frac{m}{n}$$

se interpreta como el resultado de *repartir equitativamente* m *objetos fraccionables en* n *partes*.

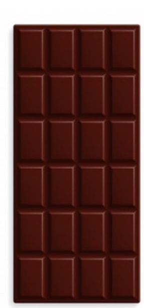
Cabe mencionar que existen otras interpretaciones adicionales de los que son las fracciones - fracciones como medida, fracción como razón o tasa de cambio, etc - sin embargo, las más utilizadas son las que hemos discutido hasta ahora.

Una buena interpretación de las fracciones nos ayuda a entender su significado y origen, así como sus aplicaciones, las cuales se utilizan en el día a día.

3.2 Operaciones con fracciones

Amplificación y simplificación de fracciones. Para motivar los conceptos de amplificación y simplificación de fracciones, podemos partir analizando el siguiente caso:

Escriba las fracciones que representen *la mitad de la barra de chocolate* de la figura a continuación



Haciendo uso de la interpretación de una fracción como "partes de un todo", podemos ver que hay ciertas expresiones naturales que representan a la mitad. A modo de ejemplo, podemos contar los trozos de chocolate individualmente, sobre el total de 24 trozos; o bien podemos contar la cantidad de filas (arreglo horizontal) de 4 pedacitos de chocolate, sobre un total de 6 filas; o bien podemos contar las columnas (arreglo vertical) de 6 pedacitos cada una, sobre un total de 4 columnas, etc. Cada uno de los conteos anteriores da lugar a las fracciones

$$\frac{12}{24}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{2}{4}$$

donde **son todas iguales**, y no equivalentes (como se suele decir), en vista que describen lo mismo.

Si observamos estas fracciones podremos notar que todas corresponden a multiplicar el numerador o denominador por un número adecuado. Por ejemplo,

$$\frac{12}{24} = \frac{3 \times 4}{6 \times 4}, \quad \text{y} \quad \frac{12}{24} = \frac{2 \times 6}{4 \times 6}$$

Viceversa, desde la fracción 12/24 se puede llegar tanto a 3/6 como a 2/4, mediante la división por algún número adecuado. En estos casos,

$$\frac{3}{6} = \frac{12 \div 4}{24 \div 4}, \quad \text{y} \quad \frac{2}{4} = \frac{12 \div 6}{24 \div 6}$$

Amplificación. La *amplificación de una fracción* $\frac{m}{n}$ corresponde a multiplicar el numerador m y el denominador n por un número natural $k \in \mathbb{N}$. De este modo,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$$

A modo de ejemplo, podemos amplificar la fracción 2/3 por 5, entonces

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

es la fracción amplificada.

Simplificación. Al proceso inverso, de dividir el numerador y el denominador de una fracción, ambos, por un número natural $k \in \mathbb{N}$, se le llama *simplificación.* Así,

$$\frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{m}{n}$$

En general, el proceso de simplifación puede ser ambiguo, en el sentido que al simplificar una fracción puede que pueda seguir siendo simplificada. Por conveniencia, se trata de llegar a *la versión más simplificada posible de la fracción.* Por ejemplo,

$$\frac{48}{18} = \frac{16 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{16}{6} = \frac{8 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{8}{3}$$

Práctica Simplifique las siguiente fracciones:

1. $\frac{12}{18}$
2. $\frac{20}{32}$
3. $\frac{30}{48}$

En la práctica es muy útil saber cuándo dos fracciones son iguales (las cuales deben relacionarse por amplificación o simplificación). Por ello, es importante considerar el siguiente resultado

Teorema 3.2.1: Igualdad de fracciones

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ números enteros, y considere las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, donde b y d son distintos de 0.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$
- Si $a \cdot d = b \cdot c$ entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Práctica Encuentre los números que faltan para que los pares de fracciones siguientes sean iguales:

1. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{12}{18}$,
2. $\dfrac{3}{x} = \dfrac{21}{35}$

Suma y resta de fracciones con igual denominador. Las operaciones entre fracciones son más sencillas cuando los denominadores de las fracciones son iguales. En general,

Teorema 3.2.2: Suma y resta de fracciones

La suma de las fracciones $\frac{p}{n}$ y $\frac{q}{n}$ es una fracción, y corresponde a

$$\frac{p}{n} + \frac{q}{n} = \frac{p+q}{n}$$

Además, la resta de las fracciones $\frac{p}{n}$ y $\frac{q}{n}$ es una fracción y su fórmula está dada por

$$\frac{p}{n} - \frac{q}{n} = \frac{p-q}{n}$$

De este modo, vemos que sumar (resp. restar) fracciones del mismo denominador corresponde a la fracción de igual denominador cuyo numerador es la suma (resp. resta) de los numeradores.

Para ilustrar estas operaciones, notemos que

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7} \qquad \text{y} \qquad \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}.$$

Práctica Simplifique las siguiente fracciones:

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$
2. $\frac{3}{4} - \frac{7}{4}$
3. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}$

Suma y resta de fracciones con distinto denominador. Para poder realizar la suma o resta de fracciones con generalidad, es necesario amplificar las fracciones para llevarlas a un denominador común.

Ejemplo 3.2.3

Suponga que Pedro y Daniela consumen $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ del chocolate de la Figura 3.7, respectivamente.

Figura 3.7: Barra de chocolate Ejemplo 3.2.3

¿Cuánto chocolate comieron en conjunto?

Si bien la respuesta $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ es directa, no es claro cómo sumar las fracciones. Para ello, deben llevarse a un denominador común y luego realizar la suma. Usando la interpretación de fracciones como partes de un todo, puede verse que en este caso $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ y además $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Por lo tanto, la suma de estas fracciones corresponde a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}.$$

Observe que las identificaciones

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}$$

corresponden a amplificación de fracciones. Ambas amplificaciones son diferentes, de modo que el denominador de ambos resultados sean iguales (en este caso igual a 6). Hay varias maneras de llegar a un denominador común, por ejemplo, amplificando las fracciones para obtener un denominador igual al m.c.m. de 2 y 3, o bien igual a la multiplicación de 2 y 3 (ambos casos iguales a 6).

En general, las operaciones de suma y resta de fracciones se pueden resumir en las expresiones

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q+p\cdot n}{n\cdot q} \quad \text{y} \quad \frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q-p\cdot n}{n\cdot q}.$$

Práctica.

1. Calcule y exprese las sumas fracciones como una sola fracción. Simplifique su respuesta

   a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{2}{6}+\frac{5}{4}$ *c)* $\frac{5}{18}+\frac{7}{12}$

2. Calcule y exprese las restas de fracciones como una sola fracción. Simplifique su respuesta

   a) $\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}$

3. Realice las siguientes operaciones combinadas

   a) $\frac{2}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ *b)* $2-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$

4. Pedro afirma que $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$ y lo justifica con el diagrama de la Figura 3.8. ¿Es correcto el razonamiento de Pedro? Justifique su respuesta.

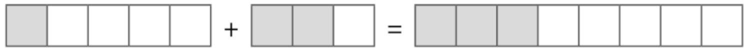


Figura 3.8: Diagrama del razonamiento sobre la suma $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$.

Multiplicación de fracciones. Primero, notemos que si $k, m, n \in \mathbb{N}$ son números naturales, entonces la multiplicación de k-veces la fracción m/n corresponde a

$$k \cdot \frac{m}{n} = \underbrace{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n}}_{k \text{ veces}} = \frac{k \cdot m}{n}$$

Esta operación tiene una interpretación clara. Cada fracción representa una parte de un todo (usando la primera interpretación), de modo que multiplicar es considerar varias veces esa fracción y, por ende, se cuenta nuevamente para obtener la fracción correspondiente.

Ejemplo 3.2.4

En la fiesta de bienvenida a una carrera de la UOH se compraron cinco pizzas, cada una de ellas se partió en ocho partes iguales. Al final de la bienvenida, la jefa de carrera le informa a los y las estudiantes que de cada pizza quedaron tres pedazos. ¿Cuánta pizza quedó al finalizar la fiesta?

En este caso, usando la interpretación de partes sobre un todo, se puede ver que la respuesta corresponde a

$$5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8} = \frac{15}{8}.$$

Por otro lado, considerando el producto general de dos fracciones cualesquiera:

Teorema 3.2.5: Multiplicación de dos fracciones

Para dos fracciones p/q y m/n bien definidas ($p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ y $n \neq 0$), el producto (multiplicación) de ellas se calcula de la siguiente manera

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$$

A modo de ilustración podemos ver que

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{14}{20}$$

Práctica

1. Realice la siguiente operación
$$6\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{3} - 1\right)$$

2. Pedro y Daniela compran 15 metros de cinta para confeccionar adornos en su sala de clases. Si usaron $\frac{3}{5}$ de la cinta, ¿cuántos metros de cinta fueron utilizados en los adornos?

Ejemplo 3.2.6

Un agricultor posee una granja en la cual $\frac{4}{5}$ de la superficie está plantada de árboles frutales. De esta superficie, $\frac{3}{7}$ son naranjos. ¿Cuánta superficie del total está ocupada por los naranjos?

El cálculo de la superficie de área corresponde a

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}.$$

Práctica

1. Calcule y simplifique la fracción resultante:

   a) $\frac{8}{25} \cdot \frac{15}{24}$ *b*) $\frac{9}{21} \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{3}$ *c*) $\frac{32}{49} \cdot \frac{14}{28}$

2. Una máquina fabrica 3.000 tornillos en una hora, de los cuales $\frac{1}{20}$ son defectuosos. ¿Cuántos tornillos no defectuosos se fabricarán en tres horas y media?

3. Calcule y simplifique la fracción resultante:

   a) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ *b*) $\frac{4}{5}\left(\frac{8}{25} + \frac{15}{24} - \frac{9}{21} \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$

División de fracciones. De manera "inversa" a cómo actúa la multiplicación, veremos que la división de fracciones actúa mediante la multiplicación de la primera fracción por el inverso de la segunda. En lenguaje matemático, tenemos que

Teorema 3.2.7: División de fracciones

Para dos fracciones p/q y m/n, donde $q, m, n \in \mathbb{N}$ son todos números distintos de 0, la división de $\frac{p}{q}$ sobre $\frac{m}{n}$ se definen mediante

$$\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m}$$

Ejemplo 3.2.8

¿Cuántos recipientes de $\frac{2}{5}$ litros se pueden llenar con $\frac{8}{5}$ litros de agua?

El resultado se obtiene al dividir la fracción $\frac{8}{5}$ en $\frac{2}{5}$. Entonces la solución es igual a

$$\frac{8}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} = 4$$

Práctica.

Calcule y simplifique la fracción resultante

1. $\frac{3}{8} \div \frac{5}{6}$.
2. $\left(1 + \frac{3}{5}\right) \div \frac{3}{4}$.

Los números racionales.

Definimos el conjunto de los números racionales, denotado con la letra $\mathbb{Q}$, como aquel que *contiene a todas las fracciones*. En otras palabras,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}$$

Estos números comparten una propiedad importante que hace natural que se les considere como un conjunto en particular: tanto la suma, la resta, la multiplicación, y la divisón de racionales es un número racional.

La letra $\mathbb{Q}$ utilizada para denotar a este conjunto fue introducida por matemático italiano Peano, y proviene de la palabra "quoziente" el cual quiere decir cuociente en italiano.

3.3 Transformación entre fracciones y números decimales

El objetivo de esta sección es relacionar las fracciones con la expansión decimal y los números decimales. Como veremos a continuación, los números decimales nos permitirán ubicar las fracciones en la recta real, y además ordenar entre fracciones distintas, entre otros.

El sistema de numeración más utilizado en la vida cotidiana se llama "*sistema de numeración en base* 10". En este sistema, todos los números se expresan como sumas de potencias de 10. De este modo, al agrupar 10 unidades de un cierto orden se obtiene 1 unidad del orden inmediatamente superior y recíprocamente, cada unidad está constituida por 10 unidades del orden inferior.

Al orden más bajo de todos (como número entero) se denomina simplemente "*la unidad*", al siguiente orden se le llama *decena*, y al siguiente posterior se la llama *centena*. En otras palabras, 10 unidades conforman una decena y 10 decenas conforman una centeana.

Ejemplo 3.3.1

Descomponga el número 213 en centenas, decenas y unidades.

En este contexto, la descomposición de 213 en en base 10 corresponde a

$$\begin{aligned} 213 &= 2 \times 100 + 1 \times 10 + 3 \times 1 \\ &= 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 \end{aligned}$$

por lo que 213 consiste en 2 centenas, 1 decena y 3 unidades.

Expansión decimal y números decimales.

Si bien todo número entero puede expresarse *en base* 10, como vimos en el Ejemplo 3.3.1, una gran ventaja de utilizar el sistema de numeración en base 10 es que nos permite escribir fracciones (o partes de los números enteros) de manera muy rápida y sencilla, usando las *potencias negativas de* 10.

Para ahondar en este concepto, analicemos el siguiente ejercicio:

Ejemplo 3.3.2

Encuentre la fracción correspondiente a la descomposición

Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima
0	3	1	2	5	4

¿Qué número representa (en cifras)?

Usando el sistema de numeracón en base 10, sabemos que el número es cuestión corresponde a una suma de múltiplos de potencias de 10. En este caso en particular, el número r se escribe como sigue

$$\begin{aligned} r &= 0\times 10^2 + 3\times 10^1 + 1\times 10^0 + 2\times 10^{-1} + 5\times 10^{-2} + 4\times 10^{-3} \\ &= 3\times 10 + 2\times \frac{1}{10} + 5\times \frac{1}{100} + 4\times \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

De este modo, siguiendo el modelo de notación posicional decimal, este número r se puede expresar simplemente como

$$r = 32,254$$

En esta escritura, la coma se utiliza para distinguir entre las cifras que corresponden a las partes enteras, de la que corresponden a fracciones con denominador de potencia 10. **A esta forma de escribir los números se le denomina *expansión decimal*.**

Una vez conocida la expansión decimal de un número real, siempre es posible determinar (dado un nivel de exactitud) a este número sobre la recta real.

Ejemplo 3.3.3

Ubique en la recta numérica el número $r = 31,254$

Práctica

Encuentre la expansión decimal del número:

- $\frac{1}{2}$
- $\frac{5}{3}$
- $\frac{77}{80}$

Transformación entre fracciones y números decimales.

Todo número tiene una expansión decimal. La expansión decimal de un número es muy útil para ubicarlo en la recta real y para comparar fracciones. Por otro lado, toda fracción puede ser transformada en un número decimal finito, decimal infinito periódico, o infinito semi-periódico, y viceversa. El contenido de la afirmación anterior se discute en el siguiente resultado:

Teorema 3.3.4: Representación decimal de fracciones

Toda fracción puede ser escrita como un número decimal. Diremos que un decimal es

1. **Decimal finito:** si su parte decimal acaba eventualmente (es finita). Por ejemplo,
$$\frac{1}{8} = 0,125$$
2. **Decimal infinito periódico:** si su parte decimal es infinita (nunca acaba) y su período - número que se repite sin fin - comienza inmediatamente después de la coma.

   Por ejemplo
$$\frac{5}{3} = 1,6666666\ldots = 1,\overline{6}$$
   En este caso el período es 6.
3. **Decimal infinito semiperiódico:** si su parte decimal es infinita pero no todas las cifras de su parte decimal se repiten.

   Por ejemplo,
$$\frac{77}{90} = 0,8555555\ldots = 0,8\overline{5}$$
   Aquí, vemos que el período es 5 y el antiperíodo es 8.

Hemos visto como una fracción puede calcularse como un número decimal, a partir de su escritura como número racional. Por otro lado, este proceso puede ser muy útil cuando, por ejemplo, se comparan dos o más fracciones. Estas comparaciones aparecen naturalmente en la vida cotidiana. El siguiente ejemplo muestra la importancia de saber hacer las comparaciones correctamente.

Ejemplo 3.3.5: Malinterpretando las fracciones

Una de las cadenas de comida rápida más famosas a nivel mundial, McDonald's, popularizó en Estados Unidos a finales de la década de los 70's la hamburguesa "cuarto de libra". A comienzos de la década de los 80's, otra cadena rival: A& W lanzó la hamburguesa "tercio de libra" con un mejor sabor y a un menor precio que el cuarto de libra de McDonald's. Sin embargo, la nueva hamburguesa de A& W fue un fracaso y debió ser retirada del mercado.

¿Qué crees que ocurrió? ¿has escuchado alguna vez del "tercio de libra"?

La idea intuitiva de porqué la hamburguesa de A& W fue un fracaso es debido a que la mayor parte de los consumidores de comida rápida no se dieron cuenta que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, y sólo se fijaron en que el 4 es más grande que el 3 (lo cual es erróneo para ordenar fracciones). Para justificar que $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ es suficiente con pasar los números a decimal y se decide cual de ellos es más grande:
$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots > 0.25 = \frac{1}{4}.$$

Ya vimos cómo pasar de fracción a decimal. Entonces, ¿cómo se pasa de decimal a fracción?

Una manera efectiva de realizar operaciones con números decimales es transformarlos a fracción, primeramente, y luego usar las reglas de fracciones para obtener el deseado resultado. Motivados por la utilidad de este procedimiento es que presentamos la siguiente clasificación para transformar números escritos en decimal a fracción.

Teorema 3.3.6: Representación fraccionaria de un número decimal

Una forma de escribir el número racional p/q que representa al número $r = a_0, a_1a_2a_3\ldots$ escrito en forma decimal, es la siguiente

1. **Método de transformación para decimal finito:** El numerador p consiste en el número creado al remover la coma del decimal de r. El denominador consiste en el valor de la potencia de 10 cuyo exponente es el número de cifras decimales que tenga r.

   Por ejemplo, la fracción correspondiente a $r_1 = 1,34$ se construye como p/q donde $p = 134$ y $q = 10^2$ (34 son las cifras decimales de r_1), de modo que la respuesta es
   $$r_1 = \frac{134}{10^2} = \frac{134}{100} = \frac{67}{50}.$$

2. **Método de transformación para decimal periódico :** El numerador p consiste en la resta entre el número creado al considerar las cifras de r hasta su período (inclusive) removiendo la coma del decimal de r, y el número creado al considerar las cifras de r antes del período. El denominador q se crea al juntar tantas cifras 9 como la cantidad de cifras en el período de r.

   Por ejemplo, la fracción que representa a $r_2 = 1,\overline{27}$ tiene la forma p/q donde $p = 127 - 1$ y $q = 99$ (aquí, el período de r_2 es 27, de dos cifras). Entonces
   $$r_2 = \frac{127-1}{99} = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}.$$

3. **Método de transformación para decimal semi-periódico:** El numerador p se construye igual que en el caso 2 (decimal periódico). El denominador consiste en tantos dígitos 9 como la cantidad de cifras que tenga el período de r, seguido por tantos dígitos 0 como tantas cifras tenga el antiperíodo.

   Por ejemplo, para obtener la fracción que representa a
   $$r_3 = 1,2\overline{15}$$
   observemos que r_3 tiene un período igual a 15 (dos cifras) y un antiperíodo de 2 (una cifra). Entonces la representación p/q tiene la forma $p = 1215 - 12$ y $q = 990$. Esto es,
   $$r_3 = \frac{1215-12}{990} = \frac{1203}{990} = \frac{401}{330}.$$

Práctica

1. Transforma el número dado a fracción o decimal, según corresponda
   - $\frac{315}{84}$
   - $2,\overline{14}$
   - $2,0\overline{3}$

2. Resuelva la siguiente operatoria combinada. Para ello, transforme los números decimales a fracciones.

- $0,9 - 0,9 \cdot (1,3 - 2,1\overline{01})$
- $0,5 \cdot 0,5 + 0,1\overline{23} \cdot 0,\overline{3}$

3.4 Apéndice: Números irracionales

Como hemos visto anteriormente en el Teorema 3.3.4, toda fracción (número racional) puede expresarse como números decimales finitos, infinito periódico e infinito semi-periódicos.

Es entonces razonable preguntarse: ¿cómo se podría generar un número real que no sea ni decimal finito, ni infinito periódico, ni infinito semi-periódico? En otras palabras, estamos preguntádonos: ¿existen números reales que no sean racionales?

Para estudiar esto, notemos - por ejemplo - que el número cuya expansión decimal es la secuencia de cifras de los números naturales:

$$0,1234567891011121314\ldots$$

no cae en ninguna de las categorías, ya que claramente no posee una expansión decimal finita, ni tampoco tiene una expansión infinita periódica ni infinita semi-periódica.

Más aún, este número no puede ser racional, puesto que caería dentro de las tres categorías anteriores, de modo que este número **no puede expresarse como una fracción**.

Los irracionales.

Al conjunto de los números reales cuya expansión decimal es infinita pero no periódica ni semiperiódica se les denomina *números irracionales*, y es denotado con la letra $\mathbb{I}$.

Para resumir la descripción de los números reales, presentamos el diagrama de la Firgura 3.9, a continuación

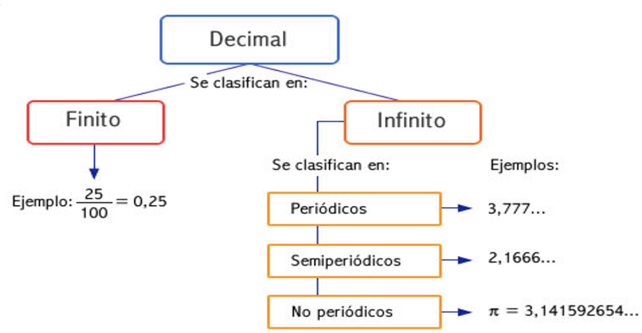


Figura 3.9: Números reales clasificados por expansión decimal

Números irracionales connotados a través de la historia incluyen

- la raíz de 2
$$\sqrt{2} = 1,414213562373\ldots$$
- el número pi
$$\pi = 3,1415926535\ldots$$

- el número de Euler
$$e = 2,7182818284\ldots$$
- y el número áureo
$$\phi = 1,6180339887\ldots$$

Cada uno juega un rol fundamental en diversas ramas de las matemáticas (la geometría, el cálculo, la teoría de números, etc.) y tiene innumerables aplicaciones en las ciencias aplicadas y en la ingenería.

¿Conoces tú otros números irracionales?

En resumen:

- El conjunto de los números racionales corresponde a
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} :\ p \text{ y } q \text{ son enteros con } q \neq 0 \right\}.$$
- El conjunto de los números *irracionales* corresponde a
$$\mathbb{I} = \{ d : d \text{ tiene expansión decimal infinita no periódica (ni semiperiódica)} \}.$$
- Al conjunto de todos los números se le denomina *conjunto de los números reales*, el cual se denota por $\mathbb{R}$, y este corresponde a la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

Capítulo 4

Razones, Proporciones y Porcentajes

La comparación vía cuocientes y el razonamiento proporcional son herramientas matemáticas muy importantes, aunque no siempre nos demos cuenta de su relevancia. Múltiples fenómenos científicos pueden modelizarse utilizando los conceptos de razón y proporción, y muchos otros son también de corte más cotidiano, que pueden resolverse con técnicas relacionadas con la proporcionalidad.

Pensemos por ejemplo en una receta de pastelería: si conocemos la cantidad de ingredientes necesarios para preparar un bizcocho, ¿cómo podríamos hacerlo para cocinar tres iguales? La respuesta a esta y otras preguntas relacionadas, yace en los contenidos que estaremos revisando a partir de ahora.

4.1 Razones

¿Alguna vez le has cambiado el tamaño a una foto o imagen[1], y te ha pasado que se deforma?

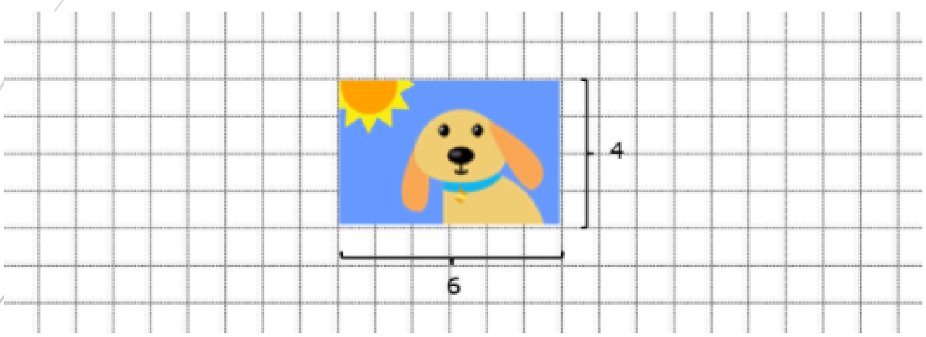


Figura 4.1: Ejemplo de Imagen Digital

Cada vez que haces esto, debemos tener la certeza de que no estamos alargando o estirando de más la imagen, para que ésta conserve sus *dimensiones originales*.

[1] Ejemplo e Imágenes: https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/razon-y-proporcion/

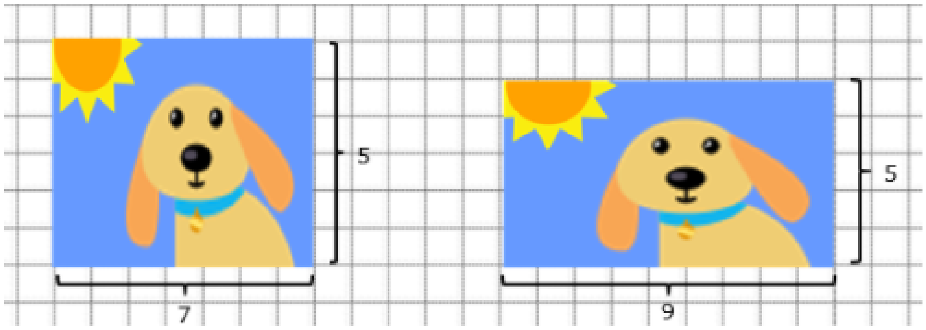


Figura 4.2: Ejemplos de Deformaciones

Una **razón** expresa una relación entre dos cantidades que se miden en las mismas unidades. En el caso de nuestro ejemplo, debemos cuidar que al mover la imagen, esta conserve perfectamente la razón ya existente entre su altura y su ancho.

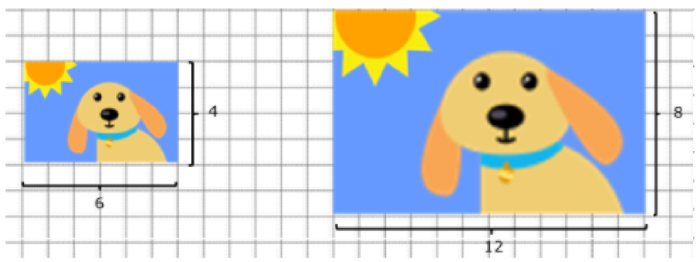


Figura 4.3: Razón entre Alto y Ancho de la Imagen

Diremos que dos cantidades p y q están en la razón $p : q$ si por cada p unidades de la primera cantidad hay q unidades de la segunda. La razón $p : q$ se lee "p es a q. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1.1

Si se mezclan 2 kilos de harina con 1 kilo de azúcar para hacer galletas, decimos que la razón entre la cantidad de harina y la de azúcar es 2:1. También Podemos decir que la razón entre la cantidad de azúcar y la de harina es 1:2.

Ejemplo 4.1.2

Podemos considerar razones entre más de dos cantidades. Por ejemplo, si para formar una masa mezclamos 20 cucharadas de harina con 5 cucharadas de polvos de hornear y 10 de azúcar, decimos que la razón entre la cantidad de harina, la de polvos de hornear y la de azúcar es 20:5:10.

Una idea importante que debes tener en cuenta, es que una razón entre dos cantidades no es un número propiamente tal, sino que, como hemos indicado ya, se trata de una comparación entre las dos cantidades involucradas. Sin embargo, sí es factible asociar a la razón $p : q$ la fracción

$$\frac{p}{q},$$

fracción que representará lo siguiente: p/q unidades de la primera cantidad, corresponden a 1 unidad de la segunda.

Ejemplo 4.1.3

Cuando decimos que la razón entre la cantidad de azúcar y la de harina en una receta es $1 : 2$, podemos decir equivalentemente que, por cada media (o sea, $1/2$) taza de azúcar, corresponde en la receta una (1) taza de harina.

4.2 Proporción

En muchas situaciones cotidianas, se conoce la razón entre dos cantidades, y una de las cantidades netas involucradas en la situación. Por ejemplo, una jornada laboral minera que funciona en la razón $4 : 3$ (cuatro días laborales a tres de descanso), y una persona que ya ha trabajado por 20 días.

A partir de esta información, podemos determinar cuántos días de descanso le corresponden, usando para ello las *proporciones*.

Ejemplo 4.2.1

Un pintor necesita mezclar dos colores de pintura para obtener un tercer color, en una razón de 3 es a 2. Si tiene 30 litros del primer color, ¿cuántos litros necesita del segundo color? Para resolver este problema, debemos encontrar una cantidad x de litros del segundo color de manera que

$$\frac{3}{2} = \frac{30}{x}.$$

Para encontrar el valor de x, realizamos la operación $(30 \cdot 2)/3 = 20$, es decir, realizamos el producto cruzado entre los dos valores conocidos de la igualdad, y dividimos por el tercer valor conocido. Es decir, necesitamos 20 litros del segundo color. La operación descrita para encontrar el valor de x se conoce como **regla de tres simple**.

Definición 4.2.2

Cuando se tiene una igualdad entre dos razones, diremos que tenemos una **proporción**.

Cada vez que tengamos un proporción donde uno de los valores es desconocido, podemos usar la regla de tres simple, para obtener el valor desconocido.

Teorema 4.2.3: Regla de Tres Simple

Supongamos que tenemos una proporción de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

donde los valores de a, b y c son conocidos. Entonces, el valor de x es igual a

$$x = \frac{c \cdot b}{a}.$$

En la medida que resolvamos más y más ejercicios usando la regla de tres simple, notaremos que en algunas situaciones se dan dos fenómenos distinguibles:

- Cuando una de las variables involucradas en el ejercicio aumenta, la otra también lo hace, conservando la razón original entre ellas. Un ejemplo sencillo son las cantidades involucradas en la receta de un bizcocho, cuando tenemos que hacer dos o más unidades.
- Cuando una de las variables involucradas aumenta, la otra disminuye en la misma medida y viceversa (cuando la primera disminuye, la segunda aumenta). Un ejemplo cotidiano de esto es la cantidad de personas trabajando en un proyecto común; pues lo esperable es que, mientras más personas participen, menos tiempo tome terminar el proyecto.

Estos conceptos intuitivos, se pueden formalizar a través de los conceptos teóricos de *proporcionalidad directa* y *proporcionalidad inversa*, cuyas propiedades fundamentales y algunos ejercicios resueltos, revisaremos a continuación.

4.2.1. Proporcionalidad directa

Consideremos la siguiente situación. Un estudiante necesita sacar fotocopia de los apuntes del curso de Cálculo, y el costo de cada fotocopia es de \$ 30. El estudiante necesita 6 fotocopias. ¿Cuál es el costo total de las fotocopias? Notemos que para resolver este problema, el estudiante realiza la siguiente operación: multiplica 30 por 6, para obtener $30 \cdot 6 = 180$. En caso que el estudiante necesite 5 fotocopias, la operación es similar: $30 \cdot 5 = 150$, y asi con otro número de fotocopias que se requiera.

Cantidad de Fotocopias	Costo (\$)
1	30
2	60
3	90
4	120
5	150
6	180

Independiente de la cantidad de fotocopias, lo que se mantiene constante es el valor total de las fotocopias, dividido por el número de fotocopias. En el ejemplo anterior este valor corresponde a 30, que es el precio unitario por fotocopia.

Definición 4.2.4

La variable a es directamente proporcional a la variable b si al aumentar a, b también aumenta manteniendo la proporcionalidad o razón. O si al disminuir a, b también disminuye manteniendo la misma proporcionalidad.

En otras palabras, al aumentar o disminuir el valor de una variable, a/b se mantiene constante.

Veamos otros ejemplos.

Ejemplo 4.2.5

En una fábrica se almacena agua mineral en bidones de 5 litros de capacidad. ¿Cuántos litros de agua se almacenan en 4 bidones? ¿y en 10 bidones?

Solución: En este caso tenemos una situación de proporcionalidad directa. Luego, para resolverlo, consideramos la razón "bidones de agua a litros de capacidad" y usando la regla de tres simple, establecemos la siguiente proporción

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{x}$$

y despejamos usando el Teorema 3.2.3 para concluir que en 4 bidones de agua, caben

$$x = \frac{4 \cdot 5}{1} = 20$$

litros de agua. En el segundo caso procedemos de manera análoga, estableciendo en este caso la proporción

$$\frac{1}{5} = \frac{10}{x}$$

para obtener que $x = \dfrac{10 \cdot 5}{1} = 50$ litros de agua.

Ejemplo 4.2.6

Si una máquina copiadora tarda 8 segundos en sacar 20 copias, ¿cuánto tiempo tardará en sacar 45 copias?

Solución: En este caso, considerando la razón "copias impresas a tiempo utilizado", establecemos la proporción directa

$$\frac{20}{8} = \frac{45}{x},$$

y usando una vez más la Regla de Tres Simple, concluimos que

$$x = \frac{45 \cdot 8}{20} = 18 \text{ minutos.}$$

4.2.2. Proporcionalidad inversa

Supongamos ahora que tenemos la siguiente situación. Se está trabajando en la cosecha de cerezas en una campo de la Región de O'Higgins, y en la siguiente tabla se resumen los tiempos que requiere realizar la cosecha según el número de personas trabajando.

Cantidad de Personas	Tiempo (Horas)
1	2
2	1
3	2/3
4	1/2
10	1/5

Naturalmente, como podemos observar, mientras más personas hay trabajando en la labor, menor es el tiempo que se requiere para finalizar la cosecha.

Definición 4.2.7

La variable a es inversamente proporcional a la variable b si al aumentar a, b disminuye en la misma proporción. O si al disminuir a, b aumenta en la misma proporción.

En otras palabras, al aumentar o disminuir el valor de una variable, $a \cdot b$ se mantiene constante.

En estos casos entonces, es el producto entre las variables involucradas la que debe mantenerse igual entre cada situación. Para entender mejor cómo funciona este tipo de ejercicios, veamos otros ejemplos.

Ejemplo 4.2.8

Si 25 jardineros tardan 12 días en podar los árboles de un parque, ¿cuántos jardineros se necesitan para hacer el mismo trabajo en 10 días? Esa es una situación de proporcionalidad inversa.

Solución: Para resolver este problema, debemos encontrar una cantidad x de jardineros de forma que

$$25 \cdot 12 = x \cdot 10,$$

es decir, el valor de x que hace que la multiplicación entre el número de jardineros y los días utilizados para trabajar, sea constante en ambas situaciones. Obtenemos el valor de x dividiendo el producto $25 \cdot 12$ por 10, obteniendo así que

$$x = \frac{25 \cdot 12}{10} = 30 \text{ jardineros}.$$

Ejemplo 4.2.9

Toma 20 minutos llenar un tanque con un grifo que tiene un caudal de 15 litros por minuto. Si se utiliza un grifo que arroja 9 litros por minuto más que el anterior, ¿en cuánto tiempo se llena el tanque?

Solución: Esta también es una situación de proporcionalidad inversa. Para resolver este problema, debemos encontrar la cantidad x de tiempo de forma que

$$20 \cdot 15 = x \cdot 24,$$

considerando que $15 + 9 = 24$ es la capacidad de la nueva llave. Es decir, obtenemos

$$x = \frac{20 \cdot 15}{24} = 12.5 \text{ minutos.}$$

4.2.3. Proporcionalidad Combinada

Cuando comparamos más de dos variables (tres o más), podemos estar en situaciones donde sea necesario combinar proporcionalidades directas e inversas. Veamos a través de un ejemplo, cómo trabajaremos en estos casos:

Ejemplo 4.2.10

Seis niñas comen 160 caramelos en dos horas, ¿cuántas horas tardarán tres de las niñas en comer 120 caramelos?

Solución: En este caso, podemos observar lo siguiente.

- Las variables "cantidad de niñas" y "horas en la que se comen los dulces" se relacionan mediante una proporcionalidad inversa: mientras más niñas tengamos, menos tiempo tardarán en comerse una cierta cantidad de dulces.
- Las variables "horas en la que se comen los dulces" y "cantidad de dulces que comen" se relacionan mediante una proporcionalidad directa: mientras más horas tengan para comer, más dulces serán consumidos por las niñas.

Por ende, anotamos en una tabla las variables involucradas y hacemos lo siguiente: multiplicamos "cruzado" cuando estemos en presencia de una proporcionalidad directa (tal como hacemos con la Regla de Tres Simple), y multiplicamos "hacia el lado" cuando sea una proporcionalidad inversa (como siempre hacemos con esta proporcionalidad).

Niñas	Horas	Dulces
6	2	160
3	x	120

Establecemos una igualdad entre las dos cadenas de multiplicaciones, y despejamos

$$6 \cdot 2 \cdot 120 = 3 \cdot x \cdot 160 \implies x = \frac{6 \cdot 2 \cdot 120}{3 \cdot 160} = 3 \text{ horas.}$$

¿Qué hemos aprendido hasta aquí?

1. Una razón expresa una relación entre dos cantidades.
2. Una proporción es la igualdad entre dos razones.
3. Dos variables x e y son directamente proporcionales si el cuociente entre ellas, $\dfrac{x}{y}$ se mantiene constante.
4. Dos variables x e y son inversamente proporcionales si el producto entre ellas $x \cdot y$ se mantiene constante.

4.3 Porcentajes

Supongamos que se quiere comunicar que 168 estudiantes de un colegio, de un total de 300, siguieron una carrera ligada a ingeniería. ¿Cuál de las siguientes fracciones es más informativa? $\frac{168}{300}$ o $\frac{56}{100}$? Lo cierto que ambas fracciones representan el mismo valor, puesto que la segunda es simplemente la simplificación de la primera, pero en muchos contextos suele ser de ayuda tener una fracción de más simple interpretación.

Definición 4.3.1

Un porcentaje es una fracción con denominador igual a 100. Para representar un porcentaje de la forma $a/100$ usamos la notación $a\,\%$.

Los porcentajes permiten referirse a una parte de un todo, sin especificar la medida de este todo. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3.2

Si sabemos que en un concierto se vendieron el $50\,\%$ de las entradas, no sabemos cuántas entradas hay en total, pero sabemos que de ellas se vendieron exactamente la mitad.

Ejemplo 4.3.3

En una tienda hay un descuento de $25\,\%$ en un producto cuyo valor es de \$32500. ¿A cuánto dinero equivale el descuento?

Solución: El $25\,\%$ corresponde a la fracción $25/100$, y por lo tanto para saber el monto del descuento debemos realizar la operación

$$32500 \cdot \frac{25}{100} = 8125.$$

En resumidas cuentas, los problemas de porcentajes se pueden dividir en 3 casos:

- Problemas donde la incógnita es la cantidad que resulta al calcular un porcentaje sobre una cantidad inicial. En este caso, buscamos resolver
$$a\,\% \text{ de } b = x.$$
- Problemas donde la incógnita es la cantidad inicial, y se conoce la cantidad resultante y el porcentaje a la que esta corresponde. Buscamos ahora
$$a\,\% \text{ de } x = c.$$
- Problemas donde la incógnita es el porcentaje que relaciona a dos cantidades conocidas. En este caso, deseamos encontrar
$$x\,\% \text{ de } b = c.$$

El Ejemplo 3.3.3 coincide con la primera categoría. Cerremos este capítulo con un par de ejemplos resueltos más, para poder dar paso a la etapa final, donde tú podrás ejercitar por tu cuenta con el listado de propuestos.

Ejemplo 4.3.4

De las/os 800 estudiantes de una Escuela de la UOH, 600 viajaron para sus vacaciones. ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se quedó en casa?

Solución: Si 600 de 800 estudiantes viajaron, sabemos que 200 se quedaron en casa. Luego, el porcentaje de las/os estudiantes que buscamos, se calcula estableciendo la siguiente proporción
$$\frac{200}{800} = \frac{x}{100} \implies x = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25\,\%.$$

Ejemplo 4.3.5

En una "Feria de las Pulgas" organizada por nuestra Junta de Vecinos, deseamos vender un 20 % más barata una polera que compramos hace muchos años. ¿A cuánto la compramos originalmente, si en la Feria la vendimos a \$15000?

Solución: Con la información del ejercicio, sabemos que el precio de venta de la polera, corresponde a 80 % del precio original de compra (por eso quedó 20 % más barata). Por ende, en este caso establecemos la proporción
$$\frac{15000}{x} = \frac{80}{100},$$
por lo que el precio de compra original es de $x = \dfrac{15000 \cdot 100}{80} = \$18750.$

Ejercicios Capítulo 3

P1. En un curso de inglés, la razón entre chilenos y extranjeros es 3:2. Si hay 24 chilenos, ¿cuántos estudiantes hay en total en el curso?

P2. La razón entre vacas y ovejas en una granja es de 7:3. Se sabe, además, que hay 8 vacas más que ovejas. ¿Cuántos de estos animales hay en total?

P3. La razón entre perros y gatos en un refugio para animales es de 6:5. Si en total suman 22 animales, ¿cuántos gatos y cuántos perros hay?

P4. Se tienen dos números en razón 9:7. Luego de restarle 5 a cada uno, quedan en razón 3:2. ¿Cuáles son esos números?

P5. ¿Cuál de las siguientes situaciones corresponde a una proporcionalidad directa? Justifique su respuesta.

a) La cantidad de unidades de cierto producto en una compra y el precio que se debe pagar por ellos.

b) El área de un cuadrado y la longitud de su lado.

c) El peso total de varios objetos objetos iguales y el número de objetos.

d) El perímetro de una circunferencia y su diámetro.

P6. ¿Cuál de las siguientes situaciones corresponde a una proporcionalidad inversa? Justifique su respuesta.

a) El número de llaves de agua que llenan un estanque y el tiempo que demoran en hacerlo.

b) El número de máquinas que elaboran un producto y la cantidad de productos que elaboran en 1 hora.

c) La longitud de los lados de un rectángulo cuando el área se mantiene constante

d) La velocidad de un móvil y el tiempo que demora en recorrer una distancia fija.

P7. El 20 % del territorio de Chile es apto para la viticultura y solo el 10 % del territorio de Brasil lo es. ¿Cuál de los países tiene mayor territorio apto para la viticultura?

P8. Una tarjeta comercial recarga mensualmente el 4 % del total del saldo. Si la deuda original es de $10.000 y no se hace ningún pago, indique cuál será la deuda a los 10 meses.

Capítulo 5

Potencias y raíces

5.1 Motivación y notación de las potencias

En muchas oportunidades te has encontrado con números que se pueden expresar como el resultado de multiplicaciones repetidas de un mismo numero, como lo son el cuadrado de un numero y el cubo de numero.

$$5^2, \quad 2^3, \quad \text{etc} \ldots$$

Una instancia de esto surge de geometría, en donde las multiplicaciones repetidas emergen naturalmente al calcular áreas o superficies de figuras regulares.

- Por ejemplo, el área de un cuadrado de lado 5 se calcula mediante

$$5 \times 5 = 5^2$$

- De un modo similar, el volumen de un cubo de lado 2 se calcula mediante

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

En aritmética y en las ciencias en general, las potencias aparecen en diversos contextos, incluyendo:

- Notación posicional

$$2020 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0$$

- Descomposición en números primos

$$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$$

- Notación científica

$$2020 = 2,02 \times 10^3$$

Notación de las potencias

Para cualquier número real $a \in \mathbb{R}$:

- El producto $a \times a$ se denota por a^2, y se le denomina "el cuadrado de a".
- El producto $a \times a \times a$ se denota por a^3, y se le denomina "el cubo de a".
- En general, el producto de a multiplicado consigo mismo n veces,

$$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces}}$$

se denota por

$$a^n$$

y se le denomina la potencia con **base** a **y exponente** n.

Ejemplo 5.1.1

- 5×5 es la potencia de 5^2, "el cuadrado de 5".
- $2 \times 2 \times 2$ es la potencia de 2^3, "el cubo de 2".
- $10 \times 10 \times 10 \times 10$ es la potencia 10^4, con base 10 y exponente 4.

Potencias especiales

Hay dos casos de exponentes sencillos, que son particularmente importantes

- Las potencias con **exponente cero** son **iguales a uno** (salvo cuando la base es igual a cero). Es decir,

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0.$$

- Las potencias con **exponente uno** son **iguales a su base**. En otras palabras,

$$a^1 = a.$$

- ¡Atención! La potencia 0^0 **no está bien definida** en matemáticas.

Ejemplo 5.1.2

- $2022^0 = 1$
- $2022^1 = 2022$

Ejemplo 5.1.3: Cuidado con el uso de paréntesis

Se debe prestar atención cuando se toman potencias de números negativos, ya que el anteponer el signo menos fuera de la potencia puede cambiar el resultado. Por ejemplo,

- $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

- $-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$

En el primer caso, el número corresponde a la "la cuarta potencia del inverso aditivo de 2". En el segundo caso, el número correspode a "el inverso aditivo de la cuarta potencia de 2".

5.2 Propiedades de las potencias

Operatoria de potencias con igual base: Parte I.

¿Cómo podemos agrupar **multiplicaciones de potencias con igual base**? en otras palabras, ¿cómo se puede simplificar una expresión del tipo $5^2 \times 5^4$?

En este caso en particular, notemos que

$$\begin{aligned} 5^2 \times 5^4 &= \underbrace{\underbrace{(5 \times 5)}_{\text{2 veces}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5 \times 5)}_{\text{4 veces}}}_{\text{2+4 veces}} \\ &= 5^{2+4}. \end{aligned}$$

En general, para reescribir la multiplicación de potencias a^n y a^m como una sola potencia, hacemos lo siguiente:

- Sumar los exponentes n y m.
- El resultado de $a^n \times a^m$ corresponde a a^{n+m}.

$$\begin{aligned} a^n \times a^m &= \underbrace{\underbrace{(a \times \ldots \times a)}_{n \text{ veces}} \times \underbrace{(a \times \ldots \times a)}_{m \text{ veces}}}_{n+m \text{ veces}} \\ &= a^{n+m}. \end{aligned}$$

Operatoria de potencias con igual base: Parte II.

¿Cómo podemos escribir **la potencia de una potencia**? en otras palabras, ¿cómo podemos simplificar una expresión del tipo $(5^3)^2$?

Para este caso en particular, las multiplicaciones se pueden reagrupar como sigue

$$\begin{aligned} (5^2)^3 &= \underbrace{5^3 \times 5^3}_{\text{2 veces}} \\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{\text{3 veces}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{\text{3 veces}}}_{\text{2 veces}}}_{3\times 2 \text{ veces en total}} \\ &= 5^{3\times 2} \end{aligned}$$

En general, para calcular **la potencia de una potencia** $(a^n)^m$ hacemos lo siguiente:

1. Multiplicar los exponentes n y m.
2. El resultado de $(a^n)^m$ corresponde a $a^{n\times m}$.

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= \underbrace{(a^n)\times(a^n)\times\ldots\times(a^n)}_{m \text{ veces}}\\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{(a\times\ldots\times a)}_{n \text{ veces}}\times\ldots\times\underbrace{(a\times\ldots\times a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}}}_{n\times m \text{ veces en total}}\\ &= a^{n\times m}.\end{aligned}$$

Potencias con exponente negativo.

¿A qué corresponde **la potencia inversa menos uno**, a^{-1}? Usando la operatoria de potencias de igual base, vemos directamente que si $a \neq 0$ entonces

$$a^{-1}\times a = a^{-1+1} = a^0 = 1.$$

De este modo, se tiene que a^{-1} es el inverso multiplicativo de a. Esto es,

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{si} \quad a \neq 0.$$

Ejemplo 5.2.1

$$5 = \frac{1}{5} = 0,2$$

¿En general, a qué corresponde **la potencia negativa** a^{-n} cuando $n \in \mathbb{N}$?

Se tiene que

$$\begin{aligned}a^{-n} = (a^{-1})^n &= \underbrace{\frac{1}{a}\times\ldots\times\frac{1}{a}}_{n \text{ veces}}\\ &= \frac{1}{a\times a\times\ldots\times a} \quad \leftarrow n \text{ veces}\\ &= \frac{1}{a^n}, \quad \text{si} \quad a\neq 0\end{aligned}$$

Esto quiere decir que a^{-n} **es el inverso multiplicativo de la potencia** a^n.

Ejemplo 5.2.2

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

Operatoria de potencias con igual base: Parte III

¿Cómo podemos agrupar **divisiones** de potencial **con igual base**? en otras palabras, ¿cómo se puede reducir la expresión $2^5 \div 2^3$? (es decir, ?‘$\frac{2^5}{2^3}$?)

Para este ejemplo en particular, notemos que

$$\begin{aligned}\frac{2^5}{2^3} &= 2^5 \times \frac{1}{2^3} \\ &= 2^5 \times 2^{-3} \\ &= 2^{5-3}\end{aligned}$$

En general, para dividir las potencias a^n y a^m hacemos lo siguiente:

1. Restar los exponentes n y m.
2. El resultado de $a^n \div a^m$ corresponde a a^{n-m}.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Operatoria de potencias con igual exponente.

¿Cómo podemos agrupar **multiplicaciones** de distintas potencias **con igual exponente**? en otras palabras, ¿cómo se puede reducir una expresión del tipo $2^3 \times 5^3$?

En este ejemplo en particular, notemos que

$$\begin{aligned}2^3 \times 5^3 &= \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ veces}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{3 \text{ veces}} \\ &= \underbrace{(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)}_{3 \text{ veces}} \\ &= (2 \times 5)^3 \\ &= 10^3 = 1.000\end{aligned}$$

En general, para multiplicar distintas potencias a^n y b^n hacemos lo siguiente:

1. Multiplicar las bases a y b.
2. El resultado de $a^n \times b^n$ corresponde a $(a \times b)^n$.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

En contraste, ahora podemos preguntarnos

¿Cómo podemos agrupar **divisiones** de distintas potencias **con igual exponente**? en otras palabras, ¿cómo podemos reducir una expresión del tipo $20^3 \div 5^3$? (es decir, $\frac{20^3}{5^3}$?)

Para este ejemplo en particular, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{20^3}{5^3} &= \frac{20 \times 20 \times 20}{5 \times 5 \times 5} \begin{array}{l} \leftarrow 3 \text{ veces} \\ \leftarrow 3 \text{ veces} \end{array} \\
&= \frac{20}{5} \times \frac{20}{5} \times \frac{20}{5} \leftarrow 3 \text{ veces} \\
&= \left(\frac{20}{5}\right)^3 \\
&= 4^3 = 64.
\end{aligned}$$

En general, para **dividir potencias** a^n y b^n **de igual exponente**, hacemos lo siguiente:

1. Dividir las bases a y b.
2. El resultado de a^n/b^n corresponde a $(a/b)^n$.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Teorema 5.2.3: Resumen de propiedades de las potencias

Para números reales distintos de cero $a \neq 0$ y $b \neq 0$, y para números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos que

Operación de potencia	**Característica**	**Ecuación**
Multiplicación	misma base	$a^n \times a^m = a^{n+m}$
División	misma base	$a^n/a^m = a^{n-m}$
Multiplicación	mismo exponente	$a^n \times b^n = (a \times b)^n$
División	mismo exponente	$a^n/b^n = (a/b)^n$
Potencia de potencia	-	$(a^n)^m = a^{n \times m}$
Exponente inverso	-	$a^{-1} = 1/a$
Exponente negativo	-	$a^{-n} = 1/a^n$
Exponente cero	-	$a^0 = 1$
Exponente uno	-	$a^1 = a$

5.3 Notación científica

Introducción y ejemplos.

Una de las aplicaciones más importantes de las potencias en las ciencias aplicadas - incluyendo la Física, Química, Biología e Ingeniería - es una manera alternativa de describir los números reales.

Esta forma de describir números se le conoce como notación científica, la cual tiene tres grandes propósitos:

- Facilita la escritura y la lectura de números reales cuyos "tamaños"sean muy grandes o muy pequeños.
- Facilita la comparación entre números de gran magnitud (o muy pequeña magnitud).
- Facilita enormemente los cálculos de números cuyos "tamaños"sean muy grandes o muy pequeños

Ejemplo 5.3.1

Los glóbulos rojos en el ser humano son muy pequenos, y se estima que tienen un diámetro (en promedio) de

$$0.000065$$

metros.

Ejemplo 5.3.2

Un gramo de hidrógeno contiene (en promedio)

$$602,214,199,470,000,000,000,000$$

átomos de hidrógeno. Esto es, más de seiscientos mil trillones de átomos.

Notación científica.

Todo número real $r \in \mathbb{R}$ puede ser escrito, mediante esta notación, como sigue

$$r = a \times 10^n$$

lo cual se escribe alternativamente,

$$r = a \times E\ n$$

donde

- **El coeficiente a:** es un número real cuyo valor absoluto está entre 1 (inclusive) y 10 (exclusive)

  $$1 \leq |a| < 10.$$

  Este número a describe la expansión decimal de los primeros dígitos distintos de cero del número r; es decir,

  $$a = a_1, a_2 a_3 a_4 \ldots \quad \text{donde} \quad a_1 \neq 0$$

- **El orden de magnitud n:** es un número entero $n \in \mathbb{Z}$, el cual describe el tamaño del número real r.
- Cuando $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ es un número positivo o cero: el número real r que representa la notación científica está fuera del intervalo $(-1, 1)$; es decir,

  $$r \leq -1 \quad \text{o bien} \quad r \geq 1$$

  (Intiutivamente: esto describe números grandes.)

- Cuando $n \in \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ es negativo: el número real r que representa la notación científica está acotado entre -1 y 1. En este caso,

$$-1 < r = \pm 0, \ldots a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots < 1$$

(Este caso sirve para describir números pequeños.)

Ejemplo 5.3.3

Los glóbulos rojos en el ser humano son muy pequeños y se estima que tienen un diámetro (en promedio) de

$$0,000065 = 6,5 \times 10^{-5}$$

metros. En este caso el exponente a es igual a 6, y el orden de magnitud n es -5.

Ejemplo 5.3.4

Un gramo de hidrógeno contiene (en promedio)

$$602,214,199,470,000,000,000,000 = 6,0221419947 \times 10^{23}$$

átomo de hidrógeno. En este otro caso el exponente a es igual a 6, y el orden de magnitud n es 23.

Realizar cálculos de multiplicación y división de números escritos en notación científica es muy sencillo:

Teorema 5.3.5: Operaciones usando notación científica

Supongamos que $r_1 = a_1 \times 10^{n_1}$ y $r_2 = a_2 \times 10^{n_2}$ son las expansiones en notación científica de los números reales r_1 y r_2. Entonces, la multiplicación y la división de los números r_1 y r_2 tienen expansión en notación científica dada por

$$r_1 \cdot r_2 = (a_1 \times 10^{n_1}) \times (a_2 \times 10^{n_2}) = (a_1 \times a_2) \times 10^{n_1+n_2}$$
$$r_1 \div r_2 = (a_1 \times 10^{n_1}) \div (a_2 \times 10^{n_2}) = (a_1 \div a_2) \times 10^{n_1-n_2}$$

Dicho de otro modo, el coeficiente de $r_1 \cdot r_2$ es igual a $a_1 \times a_2$ y el orden de magnitud es igual a $n_1 + n_2$; adicionalmente, el coeficiente de $r_1 \div r_2$ es igual a $a_1 \div a_2$ y el orden de magnitud es igual a $n_1 - n_2$.

Ejemplo 5.3.6

Problema: Suponga que Pedrito es el ser vivo más rápido de la historia del Universo, quien viajar constantemente a la velocidad de la luz en el vacío:

$$2,99792458 \times 10^5$$

kilómetros por segundo, aproximadamente.

1. Asumiendo que la vida de Pedrito tendrá una duración de

$$2,20752 \times 10^9$$

segundos (70 años aprox.) ¿Cual sería la distancia total recorrida por Pedrito durante toda su vida?

2. Si la distancia entre la Tierra y Marte, en el perihelio, es de aproximadamente

$$2,067 \times 10^8$$

kilómetros. Calcule la cantidad de segundos que le tomaría a Pedrito recorrer la distancia de la Tierra a Marte, en perihelio.

Solución:

1. La fórmula que describe la distancia d recorrida por Pedrito, quien viaja a velocidad constante v durante un periodo de tiempo t, está dada por

$$d = v \cdot t$$

En este caso, en particular, tenemos directamente que

$$\begin{aligned} d &= (2,9979458 \times 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}) \times (2,2005752 \times 10^9\ \text{s}) \\ &= (2,9979458 \times 2,2005752) \times 10^{5+9}\ \text{km} \\ &= 6,597205178 \times 10^{14}\ \text{km} \\ &= 65.972.051.780.000\ \text{km} \end{aligned}$$

usando el Teorema 5.3.5 sobre el cálculo usando notación científica.

2. Reutilizando la fórmula que relaciona el tiempo recorrido con la velocidad constante a la que se mueve Pedrito, tenemos que

$$t = \frac{d}{v}$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned} t &= \frac{2,067 \times 10^8\ \text{km}}{2,9979458 \times 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} \\ &= \frac{2,067}{2,9979458} \times 10^{8-5}\ \text{s} \\ &= 0.689472104 \times 10^3\ \text{s} \\ &= 689,472104\ \text{s} \end{aligned}$$

en vista del Teorema 5.3.5 en el caso de división usando notación científica.

5.4 Raíces: Motivación y definición

Nociones como la raíz cuadrada y la raíz cúbica de un número real están fuertemente motivadas por el cálculo de diagonales en geometría.

Ejemplo 5.4.1: Diagonales y raíces

Una aplicación del famoso Teorema de Pitágoras muestra que

- La diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene un largo igual a $\sqrt{2}$.
- La diagonal de un cubo de lado 1 tiene un largo igual a $\sqrt{3}$.
- La longitud del lado de un cubo cuyo volumen es igual a 2 se calcula mediante $\sqrt[3]{2}$.

Comenzamos la discusión analizando la pregunta: ¿qué entendemos por la raíz cuadrada de un número?

Definición 5.4.2: Raíz cuadrada de un número real

Decimos que el número real $r \in \mathbb{R}$ es la raíz cuadrada de b, escrito $r = \sqrt{b}$, cuando

- r satisface la condición $r^2 = b$, y
- $r \geq 0$.

Ejemplo 5.4.3

Podemos chequear que 3 es la raíz cuadrada de 9, lo cual se escribe $3 = \sqrt{9}$ (o $3 = \sqrt[2]{9}$), porque

- resuelve $3^2 = 9$, y
- $3 \geq 0$.

Ejemplo 5.4.4

Vemos que -3 **no es la raíz cuadrada de** 9, lo que se escribe $-3 \neq \sqrt{9}$, pues

- a pesar de que satisface $(-3)^2 = 9$,
- $-3 < 0$ no es un número positivo.

¡Atención! Cuando $b \in \mathbb{R}$ es un número negativo ($b < 0$), la raíz cuadrada de b, $\sqrt{b}$, no es un número real, a pesar de estar bien definido[1].

[1] En este caso $\sqrt{b}$ es un número complejo, escrito $\sqrt{b} \in \mathbb{C}$. No discutiremos este caso en el apunte

Ejemplo 5.4.5

La raíz cuadrada $\sqrt{-1}$ **no es un número real**, ya que $-1 < 0$ es negativo.

De manera análoga analizamos la pregunta: ¿qué entendemos por la raíz cúbica de un número?

Definición 5.4.6: Raíz cúbica de un número real

Decimos que el número real $r \in \mathbb{R}$ es la raíz cúbica de b, escrito $r = \sqrt[3]{b}$, cuando

- r satisface la condición $r^3 = b$, y

Ejemplo 5.4.7

2 es la raíz cúbica de 8, escrito como $2 = \sqrt[3]{8}$, puesto que 2 satisface $2^3 = 8$.

¡Atención! La raíz cúbica del número $b \in \mathbb{R}$ siempre existte como un número real

$$\sqrt[3]{b} \in \mathbb{R},$$

incluso cuando b es negativo ($b < 0$).

Ejemplo 5.4.8

La raíz cúbica de -8 está bien definida como número real. De hecho, $\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que -2 satisface la condición $(-2)^3 = -8$.

De manera más general, si $n \in \mathbb{N}$ es un número natural fijo podemos preguntarnos: ¿qué entendemos por la raíz n-ésima de un número?

Definición 5.4.9: Raíz n-ésima de un número real - caso n impar

Si $n \in \mathbb{N}$ es un **número impar**, decimos que r es la raíz n-ésima de b, escrito como $r = \sqrt[n]{b}$, cuando

- r satisface la condición $r^n = b$.
- Aunque $b < 0$ sea negativo, la raíz n-ésima siempre existe.

Ejemplo 5.4.10

-10 es la raíz quinta (5-ésima) de -100.000, lo cual se escribe $-10 = \sqrt[5]{-100.000}$, porque

- -10 satisface la condición $(-10)^5 = (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) = -100.000$.

- Como $n = 5$ es impar, el hecho que -10 sea negativo no importa.

Continuamos estudiando el caso general de raíz n-ésima en el otro caso de n.

Definición 5.4.11: Raíz n-ésima de un número real - caso n par

Si $n \in \mathbb{N}$ es un **número par**, decimos que r es la raíz n-ésima de b, escrito como $r = \sqrt[n]{b}$, cuando

- b es positivo ($b > 0$), y
- r satisface la condición $r^n = b$.

De este modo, si b llega a ser negativo, entonces la expresión $\sqrt[n]{b}$ no existe como número real.

Ejemplo 5.4.12

3 es la raíz cuarta (4-ésima) de 81, escrito como $3 = \sqrt[4]{81}$, porque

- Como $n = 4$ es par, 81 debe ser positivo, y
- 3 satisface la condición $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Ejemplo 5.4.13

La raíz 2020-ésima de -1,

$$\sqrt[2020]{-1}$$

no existe como número real, porque 2020 es un número par y -1 es negativo.

5.5 Operatoria con raíces

¡Las raíces son potencias fraccionarias! Supongamos que queremos encontrar un número real $r \in \mathbb{R}$ que satisfaga la relación

$$r^n = b,$$

para un valor fijo de $b \in \mathbb{R}$. En otras palabras, queremos encontrar la raíz n-ésima de b. Notemos, entonces, que b elevado a la potencia $1/n$, esto es $r = b^{\frac{1}{n}}$ (en caso de ser un número real), sería una buena elección para r, ya que

$$\begin{aligned}(b^{\frac{1}{n}})^n &= \underbrace{b^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times b^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ veces}} \\ &= b^{\overbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}^{}_{n \text{ veces}}} \\ &= b^{n \times \frac{1}{n}} \\ &= b^1 = b\end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades de las potencias de la misma base y exponente igual a uno.

El argumento anterior muestra que

Teorema 5.5.1: Raíces como potencias fraccionarias

La potencia fraccionaria $1/n$ de un número real $b \in \mathbb{R}$ coincide con la raíz n-ésima de b

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

cuando la raíz existe. En este contexto, llamamos a $\sqrt[n]{b}$ un radical, donde $b \in \mathbb{R}$ es el radicando y $n \in \mathbb{N}$ es el índice.

Esta representación de las raíces como potencias fraccionarias es particularmente útil para entender y caracterizar la operatoria entre raíces, lo cual será estudiado en esta sección.

Ejemplo 5.5.2

La potencia fraccionaria $121^{\frac{1}{2}}$ corresponde a la raíz cuadrada de 121, ya que

$$121^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{121} = 11$$

Operatoria de radicales con igual índice.

¿Cómo multiplicamos y dividimos distintas raíces con el mismo índice? En otras palabras, ¿cómo podemos calcular expresiones del tipo $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$, y $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[3]{5}$?

En el primer caso, notamos que

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} &= 2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} \\ &= (2 \times 5)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2 \times 5}.\end{aligned}$$

De manera similar, podemos agrupar los radicales en una división como sigue

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{10} \div \sqrt[3]{5} &= 10^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}} \\ &= (10 \div 5)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{10 \div 5}.\end{aligned}$$

Teorema 5.5.3: Multiplicación de radicales con igual índice

En general, para **multiplicar dos radicales** $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ hacemos lo siguiente:

1. **Multiplicar los radicandos** a y b.
2. El resultado de $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$ corresponde a $\sqrt[n]{a \times b}$.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

De una manera similar, se tiene que

Teorema 5.5.4: División de radicales con igual índice

Para **dividir dos radicales** $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ en general, hacemos lo siguiente:

1. **Dividir los radicandos** a y b.
2. El resultado de $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$ corresponde a $\sqrt[n]{a \div b}$.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a \div b}$$

Operatoria de radicales con igual radicando.

¿Cómo podemos multiplicar y dividir distintas raíces con el mismo radicando? En otras palabras, ¿cómo podemos calcular expresiones del tipo $\sqrt[2]{5} \times \sqrt[3]{5}$, y $\sqrt[2]{5} \div \sqrt[3]{5}$?

En el primer caso, la multiplicación de radicales se traduce en suma de exponente fraccionarios:

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{5} \times \sqrt[3]{5} &= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{3+2}{2\times 3}} = (\sqrt[2\times 3]{5})^{3+2}.\end{aligned}$$

De manera similar, la división de radicales se traduce en la diferencia de exponentes fraccionarios:

$$\begin{aligned}\sqrt[2]{5} \div \sqrt[3]{5} &= 5^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \\ &= 5^{\frac{3-2}{2\times 3}} = (\sqrt[2\times 3]{5})^{3-2}.\end{aligned}$$

Teorema 5.5.5: Multiplicación de radicales con igual radicando

En general, para **multiplicar dos radicales** $\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[m]{b}$ hacemos lo siguiente:

1. **Sumar el inverso de los índices** n y m, es decir

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \quad \text{que es igual a} \quad \frac{m+n}{n\times m}$$

2. El resultado de $\sqrt[n]{b}\times\sqrt[m]{b}$ corresponde a $b^{\frac{m+n}{n\times m}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{b}\times\sqrt[m]{b} &= (\sqrt[n\times m]{b})^{m+n}\\ &= \sqrt[n\times m]{b^{m+n}}\end{aligned}$$

De mandera análoga, tenemos

Teorema 5.5.6: División de radicales con igual radicando

En general, para **dividir dos radicales** $\sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[m]{b}$ hacemos lo siguiente:

1. **Restar el inverso de los índices** n y m, es decir

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{m} \quad \text{que es igual a} \quad \frac{m-n}{n\times m}$$

2. El resultado de $\sqrt[n]{b}\div\sqrt[m]{b}$ corresponde a $b^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}=b^{\frac{m-n}{n\times m}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{b}\div\sqrt[m]{b} &= (\sqrt[n\times m]{b})^{m-n}\\ &= \sqrt[n\times m]{b^{m-n}}.\end{aligned}$$

Operatoria iterada de radicales.

¿Cómo podemos calcular la raíz n-ésima de una raíz m-ésima? En otras palabras, ¿cómo podemos calcular expresiones del tipo $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$?

En este caso, notamos que ambos radicales anidados se pueden expresar como una potencia fraccionaria, en virtud del Teorema 5.5.1, lo cual permite escribir

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} &= (5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\\ &= 5^{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}\\ &= 5^{\frac{1}{3\times 4}}\end{aligned}$$

Razonando como en el ejemplo anterior, se desprende inmediatamente el siguiente resultado

Teorema 5.5.7: Radicales iterados

Para calcular **la raíz de una raíz**, es decir $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}$, hacemos lo siguiente

1. Multiplicar el inverso de los exponentes n y m. Esto es, $\frac{1}{n}\times\frac{1}{m}=\frac{1}{n\times m}$.

2. El resultado de $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}$ corresponde a $b^{\frac{1}{n}\times\frac{1}{m}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} &= (b^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}\\ &= b^{\frac{1}{n}\times\frac{1}{m}}\\ &= b^{\frac{1}{n\times m}}\end{aligned}$$

En vista del Teorema 5.5.1, vemos que el resultado del radical iterado $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}$ es igual al radical $\sqrt[n\times m]{b}$

Resumen de operatoria de raíces.

Todos los resultados anteriores, sobre operatoria de raíces, pueden resumirse en la siguiente tabla:

Para números naturales $n, m \in \mathbb{N}$, y números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes relaciones (cuando las raíces existan como números reales):

Operación de potencia	**Característica**	**Ecuación**
Multiplicación	mismo índice	$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$
División	mismo índice	$\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a/b)}$
Multiplicación	mismo radicando	$\sqrt[n]{b}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\times m]{b^{m+n}}$
División	mismo radicando	$\sqrt[n]{b}\div\sqrt[m]{b}=\sqrt[n\times m]{b^{m-n}}$
Radical iterado	–	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[n\times m]{b}$

¡Atención! Las raíces no se pueden distribuir sobre la suma (o resta) de radicandos. En otras palabras, se tiene en general que "*la raíz de una suma (o resta) es distinta a la suma (o resta) de las raíces*". En lenguaje matemático, lo anterior se escribe como

$$\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a-b}\neq\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a}.$$

En particular, *la raíz cuadrada de la suma/diferencia de dos números* ***no es igual que*** *la suma/diferencia de las raíces cuadradas*. Esto es,

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{a}.$$

Ejemplo 5.5.8

Se tiene que

$$\sqrt{4+9}\neq\sqrt{4}+\sqrt{9},$$

puesto que $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3,6055$ pero sin embargo $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$.

5.6 Operatoria combinada de los números reales

Ya conocemos una gran variedad de operaciones que nos permiten combinar números reales de distintas maneras:

- Potencias y raíces
- Multiplicación
- División
- Adición (suma)
- Substracción (resta)

Muchas veces tendrás que calcular expresiones que *combinan varias operaciones en simultáneo*, por lo que es esencial saber *en qué orden se deben ejecutar las operaciones*.

El orden de ejecución de las operaciones es importante, ya que éste asegura que la expresión combinada tenga un único resultado. De otro modo, se podría llegar al menos a dos resultados distintos para la misma expresión, dependiendo del orden en que se ejecutan las operaciones.

Ejemplo 5.6.1

¿Cuál es el valor de $6 \div 2 \times (1 + 2)$? ¿Cuál es el valor de $3 + 3 \times 3 + 3$?

Para poder determinar un único resultado tanto para las expresiones, como cualquier expresión combinada, usamos el resultado siguiente

Teorema 5.6.2: Reglas de la operatoria combinada

El orden (o jerarquía) en el cual se deben calcular las operaciones es el siguiente:

1. PAréntesis
2. POtencias y raíces
3. MUltiplicación
4. División
5. Adición (suma)
6. Substracción (resta)

Además, cuando se calculan las potencias y raíces, las multiplicaciones y divisiones, las sumas y las restas, se deben realizar en **el orden de izquierda a derecha**.

La regla anterior se resume mnemotéticamente con la sigla PAPOMUDAS.

Ejemplo 5.6.3

Usando la regla PAPOMUDAS, vemos que

$$
\begin{aligned}
&7 + 10 \times 13 - 8 + 40 \div 2 \\
&= 7 + 130 - 8 + 20 \\
&= 149
\end{aligned}
$$

De manera similar,

Ejemplo 5.6.4

Usando la regla PAPOMUDAS, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&9 \times (\sqrt{225} - 10 + 2^3 - 24 \div 6) \\
&= 9 \times (15 - 10 + 8 - 4) \\
&= 9 \times 9 \\
&= 81
\end{aligned}
$$

Ejercicios Capítulo 4

P1. Calcula el resultado de los siguientes ejercicios, usando propiedades de potencias.

a) $(2^2)^{-3} \cdot 2^3$

b) $5^3 \cdot 4^2 \cdot 5^{-1} \cdot 4^{-2}$

c) $\dfrac{6^5}{2^5 \cdot 3^3}$

d) $\dfrac{2^4 \cdot 3^4}{6^3}$

e) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{10} \cdot \left(\dfrac{5^5}{4^5}\right)^{-2}$

f) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 6^{-3}$

P2. Calcula el resultado de los siguientes ejercicios, usando propiedades de raíces.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}$

d) $\sqrt{24} + 5\sqrt{6} - \sqrt{486}$

e) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[6]{3^4}}$

f) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4$

P3. Escribe las siguientes cantidades usando notación científica.

a) Tamaño promedio de un virus: $0,000000015$ metros.

b) Diámetro del Sol: 1400000 kilómetros.

c) Masa aproximada de la Luna: 74000000000000000000000000 gramos.

P4. Determina el valor de

$$7 \cdot 4^2 + [6 + 2 \cdot (2^3 : 4 + 3 \cdot (-2)) - 7 \cdot 2] + 9 : \sqrt{9}$$

P5. Calcule ahora el valor de

$$\left[\left(2 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{5} : 3\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3\right] : \left(5 - \frac{6}{5}\right)$$

P6. La velocidad de la luz es aproximadamente $3 \cdot 10^8$ m/s.

a) ¿Qué distancia recorre la luz del Sol en un año?

b) ¿Cuánto tarda la luz del Sol en llegar a Plutón, si sabemos que la distancia promedio entre ellos es de $5,914 \cdot 10^6$ kilómetros?

Nota: ¡Cuida usar las unidades métricas adecuadas al resolver este ejercicio!

Capítulo 6

Expresiones algebraicas

Según Aurelio Baldor (matemático cubano, autor de algunos libros que probablemente conoces!) el álgebra es "la rama de la matemática que estudia las cantidades, consideradas del modo más general posible". Etimológicamente hablando, esta palabra es de origen árabe y significa "recomposición" o "reintegración".

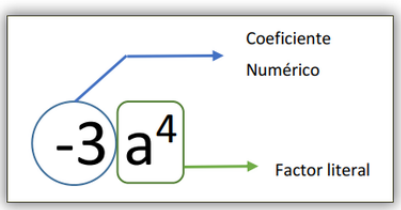
En líneas muy generales, denominamos álgebra a una importante rama de la matemática, en la cual las operaciones que conocemos cotidianamente son generalizadas, empleando letras y otros signos que representan simbólicamente números. Esto lo hacemos pues, muchas veces, las matemáticas requieren trabajar con números cuyo valor es desconocido.

Precisamente son estos casos los que representaremos mediante letras y operaremos con ellas utilizando las mismas reglas que cuando trabajamos con números. De esta forma, estaremos traduciendo nuestras inquietudes, desde el idioma que usamos para comunicarnos diariamente hacia el "lenguaje de las matemáticas", que desde ahora en adelante llamaremos *lenguaje algebraico*.

6.1 Lenguaje algebraico

Imagina la siguiente situación: al preguntar por la edad de la madre de unos de tus compañeros, te responde que tiene el doble de tu edad, más 5 años. ¿Podrías determinar qué edad tiene la madre de tu compañero?

El lenguaje algebraico se utiliza para representar este tipo de situaciones, por medio de números, letras y operaciones matemáticas. Su unidad mínima es algo que llamaremos "término algebraico", y podremos distinguir en ellos un coeficiente numérico, una parte literal y el grado.



Definición 6.1.1: Partes de un término algebraico

- El coeficiente numérico es el número que multiplica a las letras, incluyendo su signo o constantes numéricas representadas por letras, como π. Si no aparece un número, corresponde al número 1.
- La parte literal corresponde a las letras del término algebraico, incluyendo sus exponentes.
- El grado respecto a una de las letras que componen la parte literal, es el valor del exponente con que aparece (si no tiene exponente, recuerda que también vale 1). El grado absoluto de un término algebraico corresponde a la suma de los grados de sus letras.

En el ejemplo, el coeficiente numérico corresponde a -3, la parte literal es a^4 y el grado es 4.

Ejemplo 6.1.2

Considerando el término algebraico

$$-5x^3y^2z,$$

identificamos:

- Coeficiente numérico: -5.
- Parte Literal: x^3y^2z.
- Grado Absoluto: $3 + 2 + 1 = 6$.

6.2 Expresiones algebraicas

De manera general, un término algebraico, o una suma o resta de dos o más de ellos, forman lo que llamaremos una expresión algebraica. Por ejemplo, la siguiente

$$6a^2b^3 - 2ab^4x + 3ab^2 - 4ab^3x.$$

En este caso, diremos que el *grado* de una expresión algebraica, corresponde al mayor de los grados de cada uno de los términos que la componen. En el ejemplo anterior, ¿podrías indicar el grado de la expresión?

Usaremos las expresiones algebraicas para representar situaciones, cuando no tengamos claridad sobre el valor de los elementos involucrados en ellas. Retomemos por ejemplo la primera situación descrita la sección anterior, sobre la pregunta que hiciste a tu compañero: si llamamos x a tu edad, podríamos *expresar* la edad de la mamá de tu amigo (que llamaremos y), por ejemplo, así:

$$y = 2x + 5$$

De esta manera, hemos encontrado una expresión algebraica que nos permite, sin importar el valor exacto de tu edad, obtener la edad que desconocemos. Por ejemplo, si tienes $x = 17$ años, entonces

$$y = 2 \cdot 17 + 5 = 34 + 5 = 39 \text{ años.}$$

Por otro lado, si tienes $x = 18$ años, de la misma manera anterior puedes calcular que $y = 2 \cdot 18 + 5 = 36 + 5 = 41$ años, y así sucesivamente, con distintos valores de x, siempre podrás determinar el valor exacto de y. Esta excelente propiedad, es la que nos hace darle valor al concepto de expresión algebraica.

Ejemplo 6.2.1

Escribamos como una fracción algebraica, la siguiente situación: "el cuadrado de un número multiplicado por diecinueve, es igual al doble de otro número".

Definamos las variables x e y, que representarán al primer y al segundo número del ejercicio que estamos trabajando. La primera parte dice "el cuadrado de un número multiplicado por diecinueve", expresión que podemos escribir de forma algebraica como $x^2 \cdot 19 = 19x^2$. De manera similar, "el doble de otro número" puede ser escrito como $2 \cdot y = 2y$, y la igualdad entre ambos queda finalmente expresada como

$$19x^2 = 2y.$$

Ejemplo 6.2.2

Podemos hacer esto de forma inversa también. Supongamos que a y b representan la cantidad de primos que tienen Amanda y Benito, y decimos que la relación entre ambas variables corresponde a la siguiente:

$$3a - 2 = b.$$

¿Cómo podemos interpretar esto? Podemos leerlo de la siguiente forma: "el triple de la cantidad de primos de Amanda, menos dos, es igual a la cantidad de primos de Benito".

6.3 Reducción de términos semejantes

Comencemos a revisar reglas y propiedades de corte más "técnico" para trabajar con álgebra. Diremos que dos o más términos de una expresión algebraica son semejantes si coinciden sus partes literales, es decir, tanto letras como su correspondiente exponente son iguales, sin importar el orden en que estén escritas.

Solo los términos semejantes de una expresión se pueden sumar o restar entre sí, operando solo sus coeficientes numéricos y conservando su parte literal, por ejemplo:

$$2nm - 4mn - nm = 2mn - 4mn - mn = (2 - 4 - 1)mn = -3mn.$$

Por un acuerdo general, se suelen expresar los resultados en orden alfabético. Resolvamos algunos ejemplos adicionales, para entender completamente cómo se simplifican los términos semejantes de una expresión algebraica.

Ejemplo 6.3.1

Reduzcamos lo más posible la expresión algebraica

$$3b - 2c - 2b + c.$$

Lo que haremos en este caso es usar a nuestra conveniencia las propiedades de conmutatividad y asociatividad, para reagrupar los términos y poder reducir aquellos que sean semejantes:

$$3b - 2c - 2b + c = (3b - 2b) + (-2c + c) = (3 - 2)b + (-2 + 1)c = b - c.$$

Ejemplo 6.3.2

Reduzcamos ahora la siguiente expresión

$$\frac{4}{3}x + \frac{7}{2} - 2x + x.$$

En este caso no hay términos diferentes (todos tienen como parte literal a x), por lo que sumamos y restamos directamente (pasando todo a fracciones) para obtener:

$$\frac{4}{3}x + \frac{7}{2} - 2x + x = \frac{8}{6}x + \frac{21}{6}x - \frac{12}{6}x + \frac{6}{6}x = \frac{(8 + 21 - 12 + 6)}{6}x = \frac{23}{6}x.$$

6.4 Operaciones entre Expresiones Algebraicas

Tan importante como saber "traducir" nuestro lenguaje cotidiano en expresiones algebraicas, corresponde a la tarea de tomar estas expresiones y poder calcular operaciones básicas entre ellas (sumarlas, restarlas, multiplicarlas y hasta dividirlas). En lo que sigue, sentaremos las bases para poder hacer esto, definiendo primero lo que usaremos como pieza fundamental de trabajo desde ahora: los binomios.

Definición 6.4.1: Binomio

Un binomio de una variable es aquella expresión algebraica que posee dos términos no semejantes entre sí. Típicamente, uno corresponde a una variable y el otro a un número.

Ejemplo 6.4.2

Las siguientes expresiones algebraicas son binomios

$$x + 5, \quad 3y - 2, \quad -4z + 8, \quad \frac{2}{5}w - \frac{7}{4}, \quad 7u - \pi.$$

En lo que sigue, aprenderemos cómo calcular las operaciones básicas (suma, resta y multiplicación, la división quedará pendiente por esta vez) entre binomios, y podremos generalizar estas operaciones para expresiones algebraicas en general.

6.4.1. Suma y Resta

Para sumar y restar binomios de una variable, es importante considerar los paréntesis, cambiando los signos si hay una resta antes de uno de ellos, y aplicar los criterios de reducción de términos semejantes. Veamos algunos ejemplos de resolución de ejercicios a continuación.

Ejemplo 6.4.3: Suma y Resta de Binomios

Un orden sugerido para resolver este tipo de ejercicios corresponde al siguiente:

1. Eliminar paréntesis, cambiando signos cuando corresponda.
2. Agrupar términos semejantes y reducirlos.
3. Ordenar resultados y concluir.

A continuación, puedes observar dos ejemplos distintos, donde haremos lo anterior.

- $(xy + 7) + (6xy - 2) = xy + 7 + 6xy - 2 = (xy + 6xy) + (7 - 2) = 7xy + 5.$
- $(4a^2 - 6) - (a^2 - 8) = 4a^2 - 6 - a^2 + 8 = (4a^2 - a^2) + (-6 + 8) = 3a^2 + 2.$

6.4.2. Multiplicación

Para multiplicar expresiones algebraicas de una o más variables, se deben aplicar los principios de distribución de un término sobre el otro. Una buena forma de poder imaginar lo que ocurre cuando hacemos esto, es pensar en un bosquejo como el siguiente: a través de un gráfico como el mostrado en la Figura 6.1, miremos una interpretación posible de la multiplicación

$$x(y + 3)$$

Vemos que el área completa (que estamos interpretando como la multiplicación de estos términos) se puede separar en dos rectángulos, el de más abajo con arista horizontal x y vertical y, y el otro con arista horizontal x y vertical 3. Como sabemos, cada uno de esos rectángulos tiene área xy y $3x$ respectivamente. Por ende, el área total queda dada por

$$x(y + 3) = xy + 3x,$$

que adquiere la misma forma que obtendríamos al "distribuir" la multiplicación de x en las otras dos cantidades. Esto mismo ocurrirá, cada vez que multipliquemos binomios entre ellos.

Veamos un segundo ejemplo en la Figura 6.2, donde buscamos representar la multiplicación

$$(x + 2)(y + 1)$$

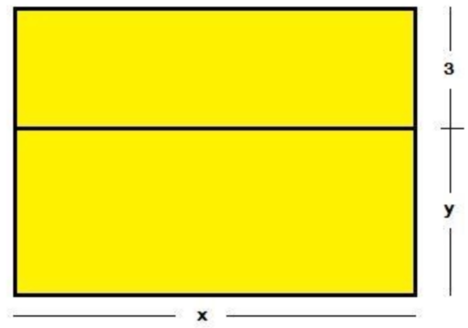


Figura 6.1: Rectángulo de Aristas x e $y+3$.

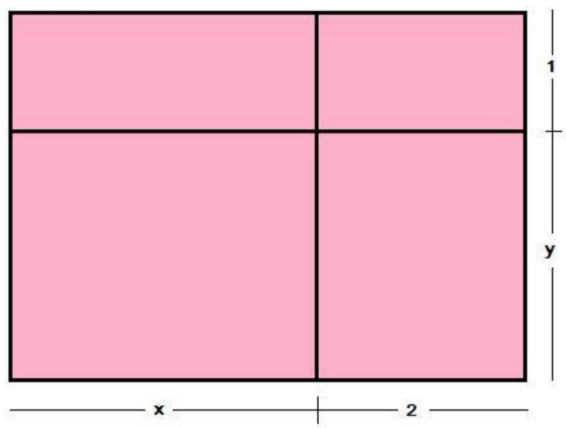


Figura 6.2: Rectángulo de Aristas $x+2$ e $y+1$.

Vemos que en este caso, el área total de la figura se puede calcular como la suma de las áreas de cuatro rectángulos más pequeños: en la esquina inferior izquierda de aristas x e y, inferior derecha de aristas 2 e y, superior izquierda de aristas x y 1 y superior derecha, de aristas 2 y 1. Luego, podemos establecer la igualdad

$$(x+2)(y+1) = x \cdot y + 2 \cdot y + x \cdot 1 + 2 \cdot 1 = xy + 2y + x + 1,$$

exactamente igual al resultado que obtenemos al distribuir el primer paréntesis con el segundo.

Ejemplo 6.4.4

Desarrollemos la expresión algebraica

$$(x+y+2)(z-4)$$

Primero, distribuyendo la multiplicación, obtenemos

$$(x+y+2)(z-4) = x(z-4) + y(z-4) + 2(z-4),$$

y luego, desarrollando cada multiplicación menor, obtenemos

$$x(z-4)+y(z-4)+2(z-4)=xz-4x+yz-4y+2z-8.$$

De esta manera, concluimos que

$$(x+y+2)(z-4)=xz+yz+2z-4x-4y-8.$$

6.5 Productos Notables

Cuando calculamos una multiplicación entre binomios de una misma variable de coeficiente principal y grado uno, el resultado final siempre tendrá la misma forma. Volvamos por ejemplo al último caso que vimos en la sección anterior, pero imaginemos que ahora ambas expresiones algebraicas dependen de x, por lo que ahora buscaremos obtener

$$(x+2)(x+1).$$

Si distribuimos el primer paréntesis en el segundo, tal como hacíamos antes, obtenemos

$$\begin{aligned}(x+2)(x+1) &= x(x+1)+2(x+1)\\ &= x\cdot x+x\cdot 1+2\cdot x+2\cdot 1\\ &= x^2+x+2x+2\\ &= x^2+3x+2.\end{aligned}$$

Si ordenamos los términos del resultado por grados decrecientes, el primero siempre será el cuadrado de la variable (para nuestro caso, x^2), el segundo término tendrá como coeficiente numérico a la suma de los coeficientes libres originales (en este caso, $2+1=3$), y el tercer término será la multiplicación de los coeficientes libres originales (aquí, $2\cdot 1=2$).

Este fenómeno, que se da en algunas otras multiplicaciones que suelen repetirse, se conoce como un **producto notable**. Veamos con un nuevo ejemplo que, de hecho, esto ocurre independiente del signo de los coeficientes libres de cada monomio original:

$$\begin{aligned}(y+6)(y-2) &= y(y-2)+6(y-2)\\ &= y\cdot y-2\cdot y+6\cdot y-6\cdot 2\\ &= y^2-2y+6y-12\\ &= y^2+4y-12,\end{aligned}$$

pues en este caso, $6+(-2)=4$ y $6\cdot(-2)=-12$.

Sintetizando a modo de fórmula general (para lo que usaremos expresiones algebraicas), si llamamos x a una variable y a,b son dos números reales cualesquiera; siempre podremos calcular la multiplicación $(x+a)(x+b)$ como

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \tag{6.1}$$

Más aún, si volvemos a usar la interpretación que teníamos para la multiplicación de monomios, podemos observar que el gráfico quedaría dado por lo que se aprecia en la Figura 6.3. Te proponemos en esta parte verificar que si sumas todas las piezas, obtendrás la fórmula (5.1).

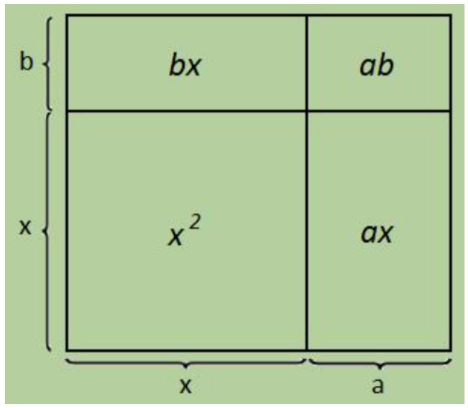


Figura 6.3: Rectángulo de Aristas $x + a$ y $x + b$.

Así como la multiplicación de binomios con término común (como los anteriores, que compartían la variable) siempre arroja un resultado específico que pudimos representar mediante una expresión algebraica, existen también otros casos en donde el resultado de una multiplicación se puede sintetizar de forma previa, usando una expresión pertinente para ello.

Esto no reemplaza el saber cómo multiplicar binomios (siempre será necesario saberlo), pero en caso de querer calcular algunas cosas de manera más rápida, podemos usarlo para nuestra ventaja... ¡nunca para complicarnos!

Aunque existen muchos más, te dejamos acá una lista con los cuatro más utilizados generalmente.

Listado de Productos Notables

1. Cuadrado de Binomio.
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$
2. Suma por Diferencia.
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$
3. Producto de Binomios con Término Común.
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$
4. Cubo de Binomio.
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Usemos este listado para resolver algunos ejercicios como ejemplos.

Ejemplo 6.5.1

Desarrollemos la expresión
$$(x + 4)^3,$$
identificando en la fórmula "Cubo de Binomio" los términos $a = x$, $b = 4$, y calculando

directamente

$$(x+4)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64.$$

Ejemplo 6.5.2

Para desarrollar la expresión

$$(y+2)^2 + (y+1)(y-5)$$

usaremos las fórmulas "Cuadrado de Binomio" para el primer término, y "Producto de Binomios con Término Común" en el segundo. En cada caso por separado, obtenemos

$$(y+2)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = y^2 + 4y + 4$$

$$(y+1)(y-5) = y^2 + (1-5)y + (1 \cdot -5) = y^2 - 4y - 5$$

Sumando ambos resultados, y luego reduciendo términos semejantes, obtenemos

$$\begin{aligned}(y+2)^2 + (y+1)(y-5) &= y^2 + 4y + 4 + y^2 - 4y - 5 = 2y^2 - 1\\ &= (y^2 + y^2) + \cancel{(4y - 4y)} + (4-5)\\ &= 2y^2 - 1.\end{aligned}$$

6.6 Factorización

En líneas generales, factorizar podría ser interpretado como el proceso "inverso" a multiplicar expresiones algebraicas o a desarrollar productos notables; vale decir, la idea ahora será escribir una expresión algebraica completamente desarrollada como un producto de expresiones más pequeñas. Por ejemplo, al escribir

$$x(y+z) = xy + xz$$

hemos multiplicado la expresión x con la expresión $y+z$, mientras que al escribir de forma inversa

$$xy + xz = x(y+z),$$

aunque la igualdad es la misma, estamos diciendo que hemos *factorizado* la expresión $xy + xz$, usando a x e $(y+z)$ como *factores*. De esta forma, vemos que la factorización no es otra cosa que leer y usar de forma conveniente, la propiedad de distribución.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 6.6.1

Factoricemos la expresión

$$16a + 24b.$$

Notemos que estos términos no tienen factor literal en común, pero sus coeficientes poseen un máximo común divisor MCD$(16, 24) = 8$. Entonces, podemos reescribir

$$16a + 24b = 8 \cdot 2a + 8 \cdot 3b = 8(2a + 3b),$$

logrando así obtener lo pedido.

Ejemplo 6.6.2

Factoricemos ahora una expresión más complicada, como la siguiente

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2.$$

De forma similar a la anterior, notemos en primer lugar que todos los términos poseen como factor común a xyz, dado que

$$x^2yz = xyz \cdot x, \quad xy^2z = xyz \cdot y, \quad xyz^2 = xyz \cdot z,$$

y por ende, podemos concluir que

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = xyz \cdot x + xyz \cdot y + xyz \cdot z = xyz(x + y + z).$$

Algo importante a observar en este punto, es que en los ejercicios anteriores, existen respuestas completamente válidas, pero distintas a las escritas aquí, a la hora de factorizar. Por ejemplo, en el primer ejercicio, podríamos haber dicho que al ser 16 y 24 números pares,

$$16a + 24b = 2(8a + 12b)$$

o en el segundo, si sólo hubiésemos considerado a y como factor común, podríamos haber respondido

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 = y(x^2z + xyz + xz^2).$$

Para resolver esta inquietud (dado que todas las factorizaciones están correctas en la práctica), cuando estemos resolviendo ejercicios de factorización, salvo que se indique explícitamente lo contrario, implícitamente buscaremos factorizar **por el factor común más "grande" posible**, en otras palabras, estaremos pensando en una especie de MCD de las expresiones algebraicas involucradas.

Otro detalle importante es que el hecho de poder factorizar una expresión, depende incluso de la forma en que se busquen agrupar sus términos. En muchas ocasiones, por ejemplo, los factores comunes pueden estar compuestos por sumas, y por ende ser difíciles de encontrar. Miremos el siguiente ejercicio, e intentemos resolverlo de tres formas distintas, para ver cuál(es) resulta(n).

Ejemplo 6.6.3

Factoricemos la expresión

$$xy - y + 2x - 2.$$

Dado que hay muchos términos involucrados en ella, los agruparemos de a pares e intentaremos buscar factores comunes adecuados.

1. Usando la propiedad asociativa, agrupemos los primeros dos y los segundos dos términos entre sí, y notemos que

$$xy - y + 2x - 2 = (xy - y) + (2x - 2) = y(x - 1) + 2(x - 1).$$

Observamos en este punto, que ahora el término $(x - 1)$ aparece en común para las expresiones $y(x - 1)$ y $2(x - 1)$, por lo que podríamos perfectamente factorizar por él, obteniendo entonces que

$$xy - y + 2x - 2 = y(x - 1) + 2(x - 1) = (y + 2)(x - 1).$$

Para verificar nuestro resultado, basta que tomemos la expresión factorizada y la desarrollemos para obtener la expresión original

$$(y + 2)(x - 1) = y(x - 1) + 2(x - 1) = xy - y + 2x - 2.$$

2. Si agrupamos los términos originales de forma distinta, también podemos factorizar si trabajamos de la siguiente forma

$$xy - y + 2x - 2 = xy + 2x - y - 2 = (xy + 2x) - (y + 2).$$

En este caso, el primer paréntesis se puede factorizar por x para obtener

$$(xy + 2x) - (y + 2) = x(y + 2) - (y + 2).$$

Ahora vemos que $(y + 2)$ es un término en común que podemos usar para factorizar. De esta forma, obtenemos que

$$xy - y + 2x - 2 = (xy + 2x) - (y + 2) = x(y + 2) - (y + 2) = (x - 1)(y + 2),$$

y recordando que la multiplicación es conmutativa, hemos obtenido el mismo resultado que en la primera opción.

3. Una tercera opción podría ser agrupar los términos de la expresión original, de la siguiente forma

$$xy - y + 2x - 2 = (xy - 2) + (2x - y).$$

Lamentablemente, vemos que de esta forma no es posible encontrar factores comunes, y por ende no será posible factorizar usando este ordenamiento.

Finalmente, otra forma de factorizar expresiones corresponde a usar para nuestra conveniencia los productos notables, pero a la inversa de lo que hicimos en la sección anterior. Ahora encontraremos términos desarrollados, que podremos condensar en sus expresiones como producto notable.

Veamos un par de ejemplos más.

Ejemplo 6.6.4

Para factorizar la expresión

$$x^2 + 6x + 9,$$

podemos reescribirla como

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2.$$

Notando que sigue la fórmula que conocemos para el Cuadrado de Binomio, podemos concluir que
$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

Ejemplo 6.6.5

La expresión
$$x^4 - 16$$
puede ser factorizada usando la expresión que conocemos para la Suma por Diferencia,
$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4).$$
Adicionalmente, vemos que $x^2 - 4$ también puede ser factorizado usando el mismo producto notable, obteniendo entonces
$$x^4 - 16 = (x^2 - 2^2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4),$$
quedando así completamente factorizado.

De manera similar a la lista de Productos Notables de la sección anterior, te dejamos acá un listado de factorizaciones importantes.

Listado de Factorizaciones Importantes

1. Trinomio Cuadrado Perfecto.
$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$
2. Diferencia de Cuadrados.
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$
3. Trinomio Simple Perfecto.
$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$
4. Cubo Perfecto de Binomio.
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3.$$
5. Suma o Diferencia de Cubos.
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Todas las técnicas anteriormente revisadas pueden ser mezcladas en un ejercicio lo suficientemente complejo, por lo que te invitamos a resolver la siguiente lista de ejercicios para poner en práctica las cosas que hemos revisado en este Capítulo.

Ejercicios Capítulo 5

P1. Escriba como expresión algebraica cada una de las siguientes expresiones literales:

a) El perímetro de un rectángulo de lados c y d.

b) El precio de una camisa con un 20 % de descuento.

c) La edad de Juan Manuel es el triple de la edad de Iván, más 6 años.

d) La suma de tres números enteros consecutivos vale 24.

e) La cuarta parte de un número entero, más el cuadrado de su sucesor.

P2. Traduzca a palabras el significado de cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x =$ radio de un círculo, A el área del mismo, $A = \pi x^2$.

b) $c =$ edad de Carlos, $d =$ edad de Daniela, $c = 4x - 2$.

c) $t =$ tiempo de juego de un futbolista, $\frac{t}{2} = 36$.

P3. Calcule las siguientes operaciones entre expresiones algebraicas, reduciendo lo más que pueda sus términos semejantes al final del desarrollo.

a) $\frac{3+x}{2} + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(2x-3)$.

b) $(3y^2 - 5y + 1)(2y + 3)$.

c) $(-2t + 3)(6t^2 - 4t + 2)$.

d) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{3}(x-2)(x+3) - 2x^2$.

e) $(x+5)^2 + (x-5)^2$.

f) $(2y+3)(2y-3) - 2(3y^2 - 1)$.

g) $(4z^3 - 5)^3$.

h) $(w+7)^2 - w(w+14)$.

i) $(y-2)^3 - y^2(y+8)$.

j) $t(t^2-2)^2 + t(t^2+2)$

k) $(x^2 + 3x + 2)(x+1) - (x+1)^2$

l) $\frac{(2x-4)^2}{2} + \frac{(3x-3)^3}{3}$.

P4. Factorice las siguientes expresiones algebraicas.

a) $a^2 + ab$.

b) $35m^2n^3 - 70m^3$.

c) $64x^2 - 32x + 4$.

d) $\frac{1}{4} - \frac{t^2}{49}$.

e) $y^3 - 4y^4$.

f) $u^2 - u - 2 + 3uv - 6v$.

g) $8x^3 - 1$.

h) $y^2 - 5y + 6$.

i) $t^2 + 14t + 13$.

j) $2b^3 - 8b^2 - 10b$.

k) $(m+n)(n-m) - 3n(n-m)$.

l) $36x^2 - (y+3x)^2$.

P5. En una prueba que rindió Karina, obtenía por cada respuesta correcta 5 puntos y por cada respuesta incorrecta, perdía 3 puntos. Si respondió 21 correctas y 7 incorrectas, ¿cuál fue su puntaje final?

P6. Paulina compró un terreno rectangular cuyo largo mide 7 metros más que su ancho. Su objetivo es cercar todo el contorno con una reja y plantar pasto en toda su superficie. Sabiendo que el metro de reja cuesta \$2500 y el metro cuadrado de pasto, \$1200, ¿cuánto dinero gastará si el ancho del terreno es de 20 metros?

Capítulo 7

Ecuaciones

El objetivo de este capítulo es recordar el concepto de ecuaciones y concentraremos nuestro estudio en las ecuaciones de primer grado.

Las ecuaciones constituyen una herramienta derivada del álgebra que se utiliza en diversos quehaceres del desarrollo humano, desde actividades cotidianas como estimar la cantidad de combustible necesario para un viaje, hasta actividades de alto nivel de complejidad, como relaciones físico-químicas, balances económicos, procesos industriales, por mencionar algunos.

Por ende, debemos comprender lo qué son y cómo utilizarlas para describir matemáticamente diferentes problemáticas.

7.1 Definición de ecuación y finalidad

Una ecuación es un planteamiento que señala que dos expresiones algebraicas son iguales. Toda ecuación está formada por dos expresiones, denominados **lados** o **miembros**, y se separan por un signo de igualdad "=".

$$\underbrace{x+2}_{\textbf{Lado izquierdo}} \overbrace{=}^{\text{Igualdad}} \underbrace{x^2+3x+2}_{\textbf{Lado derecho}} \tag{7.1}$$

Las letras en una ecuación se llaman **variables** o **incógnitas** porque pueden ser reemplazadas por números. En el caso de la ecuación (7.1), la única incógnita es x, que aparece con diferentes coeficientes y exponentes.

Ejemplo 7.1.1

Los siguientes planteamientos son ecuaciones:

1. $2x + 3y = 5$ (2 incógnitas: x e y).
2. $x^2 = 9x$ (1 incógnitas: x).

3. $w + x = \frac{7-z}{x}$ (3 incógnitas: w, x y z).

Definición 7.1.2: Ecuaciones de Primer Grado

Una ecuación de primer grado es una ecuación con una sola incógnita que aparece con grado igual a 1 (es decir, donde el exponente más grande con el cual aparece la incógnita es 1).

Ejemplo 7.1.3

Se tiene que

1. $2x + 3y = 5$ no es una ecuación de primer grado, pues tiene dos incógnitas.
2. $4p - 3 = 5$ es una ecuación de primer grado de incógnita p.
3. $x^2 = 9x$ no es una ecuación de primer grado, pues x aparece con grado (exponente) 2.

Cuando asignamos un valor numérico a la incógnita, las dos expresiones algebraicas de la ecuación toman valores numéricos correspondientes. Luego, esos valores numéricos pueden ser iguales o diferentes. Cuando los valores son iguales, decimos que la ecuación **se verifica** para el valor numérico elegido. En caso contrario, decimos que **no se verifica**.

Ejemplo 7.1.4

Evaluemos la ecuación (7.1) para el valor numérico $x = \frac{2}{5}$. Para esto, realizamos los siguientes pasos:

1. Reemplazamos x por el valor $\frac{2}{5}$ en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} x + 2 \xrightarrow{x=\frac{2}{5}} \frac{2}{5} + 2 &= \frac{2}{5} + \frac{10}{5} \\ &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

2. Reemplazamos x por el valor $\frac{2}{5}$ en el lado derecho de la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 \xrightarrow{x=\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 \cdot \frac{2}{5} + 2 &= \frac{4}{25} + \frac{6}{5} + 2 \\ &= \frac{4}{25} + \frac{30}{25} + \frac{50}{25} \\ &= \frac{84}{25}. \end{aligned}$$

3. Comparamos los dos valores numéricos obtenidos y decidimos si la ecuación se verifica para $x = \frac{2}{5}$.

$$\frac{12}{5} \neq \frac{84}{25} \implies \text{La ecuación } x + 2 = x^2 + 3x + 2 \text{ no se verifica para } x = \frac{2}{5}.$$

En la siguiente tabla, vemos otras evaluaciones (para $x = -1, 0, 1, 2/5, 0.15$) de la ecuación $x + 2 = x^2 + 3x + 2$. Como podemos ver, la ecuación **si se verifica** para el valor $x = 0$.

Valor de x	$x+2$	x^2+3x+2	Ecuación
-1	1	0	No se verifica para $x = -1$
0	2	2	**Se verifica para $x = 0$**
1	3	6	No se verifica para $x = 1$
$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{84}{25}$	No se verifica para $x = \frac{2}{5}$
0.15	2.15	2.4725	No se verifica para $x = 0.15$

Cuando tenemos una ecuación de una sola incógnita, como $x+2 = x^2+3x+2$, y tenemos un número real $r \in \mathbb{R}$, como $\frac{2}{5}$ o 0, podemos decir que:

1. **Evaluar** la ecuación en r corresponde a reemplazar la incógnita por el valor de r, y ver si se verifica o no la ecuación. Por ejemplo, evaluar $x+2 = x^2+3x+2$ en $\frac{2}{5}$ da como resultado que la ecuación no se verifica, mientras que evaluarla en 0 da como resultado que si se verifica.
2. Decimos que un número real r **resuelve** una ecuación si, al evaluar la ecuación en r, ésta se verifica. Por ejemplo, 0 resuelve la ecuación $x+2 = x^2+3x+2$ mientras que $\frac{2}{5}$ no la resuelve.
3. **Resolver** una ecuación corresponde a encontrar todos los números reales que resuelven una ecuación.

Definición 7.1.5: Solución de una Ecuación

Las soluciones de una ecuación de una incógnita son todos los números reales que la resuelven.

En general, al enfrentarnos a una ecuación, estamos interesados en encontrar al menos una solución, es decir, un número real que la resuelva, e idealmente **todas** las soluciones. Pero, ¿cuántas soluciones puede tener una ecuación?

Ejemplo 7.1.6

Consideremos la ecuación
$$x + 2 = x + 3.$$
Esta ecuación **no tiene solución**, pues para cualquier número $r \in \mathbb{R}$, al evaluar en r tendremos que
$$r + 2 \neq r + 3$$
y por lo tanto, la ecuación no se verifica.

Ejemplo 7.1.7

Consideremos la ecuación
$$5x + 2 = 8 - x$$
Esta ecuación tiene **una única solución**, dada por el número real 1. En efecto, al evaluar la ecuación en $x = 1$, tenemos que
$$\underbrace{5(1) + 2}_{\text{evaluación lado izquierdo}} = 5 + 2 = 7 = \underbrace{8 - (1)}_{\text{evaluación lado derecho}}$$

Ejemplo 7.1.8

Consideremos la ecuación
$$x^2 = 1$$
Esta ecuación tiene **dos soluciones**, dadas por los números 1 y -1. En efecto, al evaluar la ecuación en $x = 1$ o en $x = -1$, tenemos que
$$\underbrace{(1)^2 = 1}_{\text{evaluación } x=1} \quad \text{y} \quad \underbrace{(-1)^2 = 1}_{\text{evaluación } x=-1}.$$
Además, sabemos que si r es distinto de 1 o -1, entonces $(r)^2 \neq 1$, y por lo tanto la ecuación no se verifica.

Ejemplo 7.1.9

Consideremos la ecuación
$$2x + 3 = 2x + 3$$
Esta ecuación tiene **infinitas soluciones**, pues todo número $r \in \mathbb{R}$ es verifica la ecuación.

7.2 Resolución de Ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado necesitamos saber cómo transformar ecuaciones en otras más simples de manera equivalente.

Definición 7.2.1: Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Cuando dos ecuaciones son equivalentes, lo denotamos mediante el símbolo " $\iff$ ".

Ejemplo 7.2.2

- Las ecuaciones $2x + 3 = x + 1$ y $x + 4 = 0$ son equivalentes, pues ambas tienen como única solución el valor -4. Así, podemos escribir:
$$2x + 3 = x + 1 \iff x + 4 = 0$$
- las ecuaciones $x + 3 = 2x$ y $x + 4 = 2x + 1$ son equivalentes pues ambas tienen como única solución el valor 3. Así, podemos escribir:
$$x + 3 = 2x \iff x + 4 = 2x + 1.$$
- Las ecuaciones $x^2 = 1$ y $x = 1$ no son equivalentes, pues la primera tiene dos soluciones, -1 y 1, mientras que la segunda tiene solo una solución, el valor 1.

Cuando tenemos una ecuación de primer grado, nos gustaría poder trabajarla de tal manera de **reducirla a una ecuación trivial** de la forma $x = r$, para algún número $r \in \mathbb{R}$. Si pudiéramos garantizar que la ecuación $x = r$ es **equivalente** a nuestra ecuación original, entonces sabríamos que la solución necesariamente es r. Para transformar una ecuación en otra ecuación equivalente, tenemos tres operaciones básicas:

1. Sumar una expresión algebraica a ambos lados de la igualdad. Por ejemplo,
$$x + 2 = 4x + 3 \iff x + 2 + 3x + 1 = 4x + 3 + 3x + 1. \tag{7.2}$$
2. Multiplicar ambos lados de la igualdad por un número real **distinto de cero**. Por ejemplo,
$$x + 2 = 4x + 3 \iff \frac{1}{2}\cdot(x + 2) = \frac{1}{2}\cdot(4x + 3). \tag{7.3}$$
3. Reducir términos semejantes en los lados de la ecuación. Por ejemplo:
$$x + x + 2 = 4x + 3 + 4 \iff 2x + 2 = 4x + 7. \tag{7.4}$$

Es importante destacar que estas tres operaciones mantienen la equivalencia de las ecuaciones pues **son reversibles**: El proceso inverso de reducir términos semejantes es factorizar; El proceso inverso de sumar una expresión algebraica es restar la misma expresión algebraica; y el proceso inverso de multiplicar por un número distinto de 0 es dividir por ese número. Con esta idea de reversibilidad, queda claro que **no podemos multiplicar por cero**, pues esta operación no es reversible.

Definición 7.2.3: Pasos para resolver una ecuación de primer grado

Para reducir equivalentemente una ecuación de primer grado de incógnita x a una ecuación trivial, seguimos los siguientes pasos:

1. Reducir términos semejantes.
2. Sumar una expresión algebraica de la forma ax (con a un coeficiente) a ambos lados de la igualdad, de tal manera que todos los términos con x queden al lado izquierdo.
3. Sumar un número b a ambos lados de la igualdad, de tal manera que todos los términos constantes queden al lado derecho.
4. Debemos llegar a una ecuación de la forma $rx = s$, con r y s dos números.
   - Cuando el coeficiente r que acompaña x es distinto de 0, entonces multiplicar a ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{r}$, de tal manera de llegar a la ecuación trivial $x = s/r$.
   - Cuando $r = 0$, entonces: si $s = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones. si $s \neq 0$, entonces la ecuación no tiene solución.

Veamos algunos ejemplos. Durante el desarrollo, escribiremos al lado derecho (luego de un signo \) la acción que realizaremos, y en la siguiente línea, la ecuación equivalente resultante.

Ejemplo 7.2.4

Resolver la ecuación $x + x + 2 = 4x + 3 + 4$. Para esto:

$$\begin{array}{rrll}
 & x+x+2 & = 4x+3+4 & \backslash\text{reducción} \\
\iff & 2x+2 & = 4x+7 & \backslash + (-4x) \\
\iff & 2x+2+(-4x) & = 4x+7+(-4x) & \backslash\text{reducción} \\
\iff & -2x+2 & = 7 & \backslash + (-2) \\
\iff & -2x+2+(-2) & = 7+(-2) & \backslash\text{reducción} \\
\iff & -2x & = 5 & \backslash \cdot \frac{-1}{2} \\
\iff & x & = -\frac{5}{2}. &
\end{array}$$

Del desarrollo anterior, obtenemos que la solución de la ecuación es $-5/2$.

Ejemplo 7.2.5

Resolver la ecuación $\frac{4x}{3} + 2 = \frac{3x+3}{2} + 1$. Cuando tenemos una ecuación con fracciones, podemos primero amplificar la ecuación para eliminar los coeficientes fraccionarios.

$$\begin{array}{rrll}
 & \frac{4x}{3}+2 & = \frac{3x+3}{2}+1 & \backslash \cdot 6 \\
\iff & 6\cdot\frac{4x}{3}+12 & = 6\cdot\frac{3x+3}{2}+6 & \backslash\text{reducción} \\
\iff & 8x+12 & = 9x+9+6 & \backslash\text{reducción} \\
\iff & 8x+12 & = 9x+15 & \backslash - 9x \\
\iff & -x+12 & = 15 & \backslash - 12 \\
\iff & -x & = 3 & \backslash \cdot (-1) \\
\iff & x & = -3. &
\end{array}$$

Del desarrollo anterior, obtenemos que la solución de la ecuación es -3.

El siguiente ejemplo muestra una ecuación sin solución.

Ejemplo 7.2.6

Resolver la ecuación $3x + 2 = 3x + 3$. Para esto:

$$\begin{array}{rrll} & 3x+2 & = 3x+3 & \backslash + (-3x) \\ \Longleftrightarrow & 3x+2+(-3x) & = 3x+3+(-3x) & \backslash\text{reducción} \\ \Longleftrightarrow & 0x+2 & = 3 & \backslash + (-2) \\ \Longleftrightarrow & 0x+2+(-2) & = 3+(-2) & \backslash\text{reducción} \\ \Longleftrightarrow & 0x & = 1. & \end{array}$$

Como $1 \neq 0$, entonces la ecuación no tiene solución. En efecto, independientemente del valor r en que evaluemos la ecuación $0x = 1$, tendremos que $0(r) = 0 =\neq 1$, por lo que la ecuación nunca se verifica.

El último ejemplo muestra una ecuación con infinitas soluciones.

Ejemplo 7.2.7

Resolver la ecuación $2 - \frac{3}{5}x = -\frac{6}{10}x + 2$. Para esto:

$$\begin{array}{rrll} & 2-\frac{3}{5}x & = -\frac{6}{10}x+2 & \backslash\text{reducción} \\ \Longleftrightarrow & -\frac{3}{5}x+2 & = -\frac{3}{5}x+2 & \backslash + \frac{3}{5}x \\ \Longleftrightarrow & -\frac{3}{5}x+2+\frac{3}{5}x & = -\frac{3}{5}x+2+\frac{3}{5}x & \backslash\text{reducción} \\ \Longleftrightarrow & 0x+2 & = 2 & \backslash + (-2) \\ \Longleftrightarrow & 0x+2+(-2) & = 2+(-2) & \backslash\text{reducción} \\ \Longleftrightarrow & 0x & = 0. & \end{array}$$

Concluimos que la ecuación tiene infinitas soluciones. En efecto, independientemente del valor r en que evaluemos la ecuación $0x = 0$, tendremos que $0(r) = 0$, por lo que la ecuación siempre se verifica.

La metodología dada por la Definición 7.2.3 nos permite saber exactamente cuantas soluciones tiene una ecuación de primer grado. Esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 7.2.8: Soluciones de ecuaciones de primer grado

Toda ecuación de primer grado tiene 0, 1 o infinitas soluciones. Más aún una ecuación de primer grado:

- tiene infinitas soluciones si y sólo si puede reducirse equivalentemente a la igualdad $0 = 0$.
- tiene 0 soluciones si y sólo si puede reducirse equivalentemente a una igualdad de la forma $0 = r$, con r un número real distinto de 0.
- tiene una única solución si y sólo si puede reducirse equivalentemente a la ecuación trivial $x = r$ con r un número real cualquiera. En tal caso, la única solución es r.

7.3 Modelamiento por medio de ecuaciones

Las ecuaciones son una herramienta muy útil para modelar problemas de la vida cotidiana y de nuestro quehacer profesional. Describir matemáticamente una situación problemática es una tarea primordial y muchas veces de ello depende nuestra comprensión del problema y la capacidad de resolverlo.

¿Cuándo es posible describir mediante ecuaciones un problema? En general, las ecuaciones nos sirven cuando queremos **deducir el valor numérico de algo que no conocemos, a partir de cómo se relaciona con otros valores que si conocemos.**

El modelamiento por medio de ecuaciones de un problema sigue el siguiente esquema:

1. El primer paso es entender el problema. ¿Qué es lo que queremos resolver? ¿Es un problema que se puede resolver usando ecuaciones? La primera pregunta nos plantea un objetivo. La segunda, es sobre la pertinencia de la herramienta. Necesitamos poder responder ambas antes de trabajar.
2. Ahora comienza el modelamiento. En base al problema que tenemos, debemos:
   - identificar claramente cuál será la incógnita de nuestra ecuación.
   - identificar cuál o cuáles son las relaciones de igualdad que cumple.

   Con estas identificaciones, debemos plantear la ecuación (o ecuaciones) a resolver.
3. Con el paso anterior, podemos pasar al trabajo puramente matemático: Resolver la ecuación o las ecuaciones planteadas, encontrando todas las soluciones. Para esto ocupamos la metodología de la sección anterior.
4. Finalmente, una vez encontradas las soluciones, debemos interpretarlas para responder a la pregunta original de nuestro problema.

En este sentido, para plantear correctamente una ecuación que describa correctamente nuestro problema debemos:

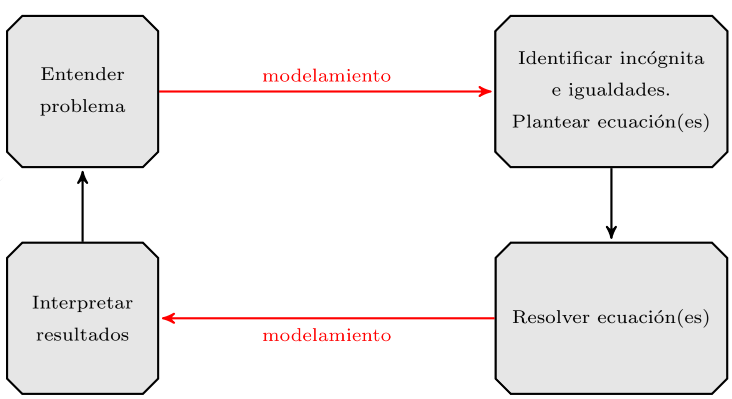


Figura 7.1: Esquema de modelamiento mediante ecuaciones

Los problemas a los que nos podemos enfrentar pueden ser más o menos complejos a nivel de modelamiento. El siguiente ejemplo consiste en un problema más bien directo: el problema ya está formulado en forma matemática y la dificultad radica en plantear correctamente la ecuación.

Ejemplo 7.3.1

Problema: *Hallar tres números consecutivos que sumen 219.*

Solución:

Paso 1: Este es un problema directo. Estamos buscando tres números que sumen 219 y que sean consecutivos. A partir de estas dos relaciones, sumar 219 y ser consecutivos, podremos plantear una ecuación para encontrarlos.

Paso 2: Queremos encontrar tres números que sumen 219 y que sean consecutivos. Definiremos como incógnita el más pequeño de los tres:

$$x = \text{ primer número de la tripleta.}$$

Como los números son consecutivos, podemos escribir que

- Segundo número de la tripleta $= x + 1$.
- Tercer número de la tripleta $= (x + 1) + 1 = x + 2$.

Luego, como los tres números deben sumar 219, tenemos que

$$\underbrace{x}_{\text{1er número}} + \underbrace{x+1}_{\text{2do número}} + \underbrace{x+2}_{\text{3er número}} = 219.$$

Reduciendo términos semejantes, podemos plantear la ecuación

$$3x + 3 = 219.$$

Paso 3: Podemos entonces resolver la ecuación, como sigue:

$$\begin{aligned} & 3x+3 &= 219 \quad & \backslash -3 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3x &= 216 \quad & \backslash \cdot \tfrac{1}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & x &= 72. & \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación tiene solución única y está dada por $x = 72$.

Paso 4: Finalmente, interpretamos la solución: Como x representaba el número más pequeño de la tripleta, los tres números consecutivos son 72, 73 y 74.

A diferencia del ejemplo anterior, el próximo ejemplo es un problema más complejo: Se describe una situación y se pregunta por una información desconocida en torno a la situación. Por lo tanto, el proceso de modelamiento toma un papel mucho más importante: para poder entregar una respuesta correcta, es crucial que nuestra descripción matemática del problema también lo sea.

Ejemplo 7.3.2

Problema: *Anita tiene 11 años más que María, pero su mamá prefiere decir que Anita tiene un año más que el doble de la edad de María. ¿Qué edad tiene Anita?*

Solución:

Paso 1: En este problema no conocemos la edad de Anita ni la de María, y nos preguntan por la edad de Anita. Lo que si nos dan son dos formas de relacionar la edad de Anita con la edad de María. Estas dos formas de relacionar las edades nos permitirán plantear una ecuación.

Paso 2: Como en el problema la edad de María es la edad de referencia, ocuparemos esta edad como incógnita. Definimos entonces:

$$x = \text{edad de María}.$$

Luego, el problema nos dice que:

- Edad de Anita $= x + 11$ (Anita tiene 11 años más que María).
- Edad de Anita $= 2x + 1$ (Anita tiene un año más que el doble de la edad de María).

Como la edad de Anita es siempre la misma, ambas formas de expresar la edad de Anita con respecto a la edad de María deben ser iguales. Por lo tanto, podemos plantear la ecuación:

$$x + 11 = 2x + 1.$$

Paso 3: Podemos entonces resolver la ecuación, como sigue:

$$\begin{array}{rrll} & x + 11 & = 2x + 1 & \backslash + (-2x) \\ \iff & -x + 11 & = 1 & \backslash - 11 \\ \iff & -x & = -10 & \backslash \cdot (-1) \\ \iff & x & = 10. & \end{array}$$

Por lo tanto, la ecuación tiene solución única y está dada por $x = 10$.

Paso 4: Finalmente, interpretamos la solución: Como x representaba la edad de María, tenemos que María tiene 10 años. Luego, ocupando cualquiera de las expresiones algebraicas que representan la edad de Anita en función de la edad de María ($x + 11$ o $2x + 1$), concluimos que Anita tiene 21 años, lo que resuelve el problema.

Ejercicios Capítulo 6

P1. En las siguientes ecuaciones, determine si el valor dado es solución de la ecuación:

a) $4x + 7 = 9x - 3$,con $x = -2$.

b) $4x + 7 = 9x - 3$,con $x = 2$.

c) $1 - [2 - (3 + x)] = 4x - (6 - x)^2$, con $x = -2$

d) $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$, con $x = 4$.

e) $\frac{x^{5/2}}{x-6} = x - 8$, con $x = 8$.

f) $\frac{x^x-6}{x-6} = \frac{(3-x)}{2}$, con $x = 1$.

P2. Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado, determinando en cada caso si la ecuación tiene 0, 1 o infinitas soluciones:

a) $2 - x = x - 8$.

b) $2x - 1 = 5x + 8$.

c) $5t + 5 = 3t + 7$.

d) $3 + 3x - 1 = x + 2 + 2x$.

e) $3(z - 2) + 10 = 2(2z + 2) + 2$.

f) $2(1 + 2x) = 10$.

g) $-2(3w - 2) = 2 - 2w$.

h) $\frac{2x+1}{3} = x - 1$.

i) $\frac{3x}{5} + 4 = x - 1$.

j) $\frac{2t-5}{5} + 2 = \frac{t-2}{3} + 2$

k) $3x+\frac{1}{4}(-2x+1) = \frac{1}{2}(x-5)+2(2x-7)-3$

l) $10(2w - 5) + \frac{w-3}{2} = \frac{1}{3}w + 2(w + 1)$.

P3. En cada caso, encuentre el número que cumple que:

a) Su doble más 5 es 35.

b) Al sumarle su sucesor, se obtiene 51.

c) Al sumar su doble, su mitad y 15, se obtiene 99.

P4. Claudia tiene inicialmente, 4 paquetes de nueces, de igual peso. A cada paquete le agrega 20g de nueces. El peso final de los 4 paquetes juntos es de 360g. ¿Cuál era el peso original de cada paquete?

P5. Tenemos tres peceras y 56 peces. Los tamaños de las peceras son pequeño, mediano y grande, siendo la pequeña la mitad de la mediana y la grande el doble. Como no tenemos ninguna preferencia en cuanto al reparto de los peces, decidimos que en cada una de ellas haya una cantidad de peces proporcional al tamaño de cada pecera. ¿Cuántos peces pondremos en cada pecera?

P6. Tres niños juntaron dulces en un cumpleaños. Juan juntó la mitad de dulces que Tomás, y Natalia juntó tres dulces más que los que juntaron Juan y Tomás juntos. Si entre los tres juntaron 45 dulces, ¿cuántos dulces juntaron cada uno?

Capítulo 8

Representación e interpretación de datos

Día a día nos encontramos con información sobre algún fenómeno de interés. Los medios se refieren a diferentes cantidades relacionadas con nuestra sociedad como precios, temperaturas, tasas de interés, tiempo, distancia, velocidad, etc. Para entender estas cantidades, que en muchos casos resumen una gran cantidad de información, se utilizan diferentes representaciones como indicadores y diferentes tipos de gráficos. El uso correcto de estas representaciones es clave para entender apropiadamente el fenómeno de interés y tomar buenas decisiones.

El objetivo de este capítulo es revisar algunos conceptos relacionados con la representación e interpretación de datos. Revisaremos el concepto de promedio y tres de los gráficos mas utilizados: gráficos de barra, gráficos circulares y gráficos de dispersión.

8.1 Promedio o Media aritmética

En muchas situaciones disponemos de mediciones u observaciones de una variable numérica de interés. Estas mediciones nos entregan información precisa de cada observación y, por lo tanto, reflejan fielmente el fenómeno estudiado. Sin embargo, en muchas ocasiones es conveniente poder resumir la información obtenida de modo de interpretar la globalidad de las observaciones. Dependiendo del objetivo buscado, lo anterior se puede realizar de diferentes maneras. Por ejemplo, podríamos buscar un valor que represente el conjunto de datos o bien un número que considere la dispersión de los mismos. A estos números los llamaremos *indicadores* y son muy utilizados para resumir información de un conjunto de datos.

En esta sección estudiaremos el *promedio* o *media aritmética*, que es un indicador que permite representar de forma equitativa un conjunto de datos.

Ejemplo 8.1.1

Nos gustaría analizar el precio de un kilo de plátanos durante la primera semana de marzo de 2021. Luego de recolectar la información, obtenemos la siguiente tabla:

Día	Lun.	Mar.	Mi.	Ju.	Vi.	Sá.	Dom.
$	1094	1070	1028	990	1090	1190	1350

¿Cuál diría usted que fue precio el p de un kilo de plátanos durante la primera semana de marzo?

Notemos que el precio que buscamos es un *valor representativo* del precio diario de un kilo de plátanos, es decir, un valor que considere por igual a los valores de la tabla anterior. Luego, podríamos pensar que el valor representativo p es aquel que permite que cueste lo mismo comprar un kilo de plátanos a precio p durante los siete días de semana a comprar con los precios tabla anterior. Luego,

$$\underbrace{p + \ldots + p}_{7-\text{veces}} = 1094 + 1070 + 1028 + 990 + 1090 + 1190 + 1350,$$

Así, podemos despejar el valor del precio p como,

$$p = \frac{1094 + 1070 + 1028 + 990 + 1090 + 1190 + 1350}{7} = \frac{7812}{7} = \$1116. \tag{8.1}$$

Por lo tanto, el valor de un kilo de plátanos durante la primera semana de marzo fue de $1116.

¿Qué ocurre si ahora quisiera estimar el valor un kilo de plátanos durante el mes de marzo?

Realizando un razonamiento similar, se obtiene que el precio de un kilo de plátanos durante el mes de marzo es:

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{31}}{31},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_{31}$ corresponden al precio de un kilo de plátanos en cada día del mes. El procedimiento anterior se puede generalizar para obtener que el precio de un kilo de plátano durante un periodo de n días es:

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n}, \tag{8.2}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son los precios de los plátanos durante los n días, respectivamente. Al valor (8.2) le llamaremos precio *promedio* para indicar que *representa* al precio de un kilo de plátanos durante un periodo de n días.

La fórmula (8.2) del ejemplo anterior puede ser utilizada para cualquier variable numérica de interés.

Definición 8.1.2: Promedio o Media aritmética

Sean n observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de una variable numérica. Se define el *promedio* o *media aritmética* de estas observaciones como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}.$$

Se dice que el promedio es una medida de *tendencia central* pues representa una cantidad central en torno a la cual se encuentran las observaciones.

En el Ejemplo 8.1.1 interpretamos al promedio como un *valor representativo*. El siguiente ejemplo muestra que también podemos interpretarlo como *reparto equitativo* o como *nivelación*.

Ejemplo 8.1.3

Un grupo de cinco amigos decide iniciar un negocio de venta de dulces chilenos. Cada uno vende por separado y luego se reparten las utilidades. Al finalizar el primer mes, las ganancias obtenidas por cada uno de los amigos fue:

Ganancia ($)	35000	37200	23200	46800	40800

¿Cuánto dinero recibirá cada amigo?

Si el reparto es equitativo, es decir, cada amigo recibe la misma cantidad, el dinero que recibirá cada uno se obtiene sumando las ganancias y luego repartiéndola entre cinco, es decir,

$$\frac{35000 + 37200 + 23200 + 46800 + 40800}{5} = \$36600,$$

que es justamente el promedio de las ganancias de cada amigo. Notemos, además, que otra interpretación posible del promedio es la de *nivelación*. Podemos pensar que el amigo que ganó más le entrego parte de su utilidad al que ganó menos de modo de que todos ganen lo mismo. Este proceso es similar al que se realiza cuando se sirve agua y se busca inconscientemente que cada vaso tenga el mismo nivel.

Una consideración importante a tener en cuenta al utilizar el promedio es que éste se calcula como el cuociente entre dos números. Luego, aunque trabajemos con números enteros es posible que su promedio no sea entero. Incluso no tiene por qué ser igual a alguno de los valores de la variable.

Ejemplo 8.1.4

Seis compañeros de universidad comparan la cantidad de mascotas que han tenido durante los últimos 5 años. Al calcular el promedio de mascotas se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{0 + 3 + 3 + 4 + 2 + 3}{6} = 2.5.$$

Así, el promedio no corresponden a un valor válido de la variable, lo cual podría generar problemas de interpretación a través del concepto de reparto equitativo (las mascotas no son particionables). Sin embargo, se puede interpretar como un valor representantivo de los datos.

8.2 Gráficos

Un gráfico es una representación visual que permite organizar y presentar información de forma apropiada. Se construyen con el objetivo de desplegar de forma intuitiva la información contenida en los datos y, así, ayudar a comprender el fenómeno en cuestión.

Existen diferentes tipos de gráficos: barra, circulares, de dispersión, etc. Cada uno adecuado para el tipo de variable o variables que quiere representar.

Dado el uso extendido de los gráficos, es muy importante conocer cómo se construyen y los alcances de cada una de estas representaciones.

En esta sección revisaremos algunos gráficos de uso generalizado: gráficos de barra, gráficos circulares y gráficos de dispersión.

8.2.1. Gráficos de barra

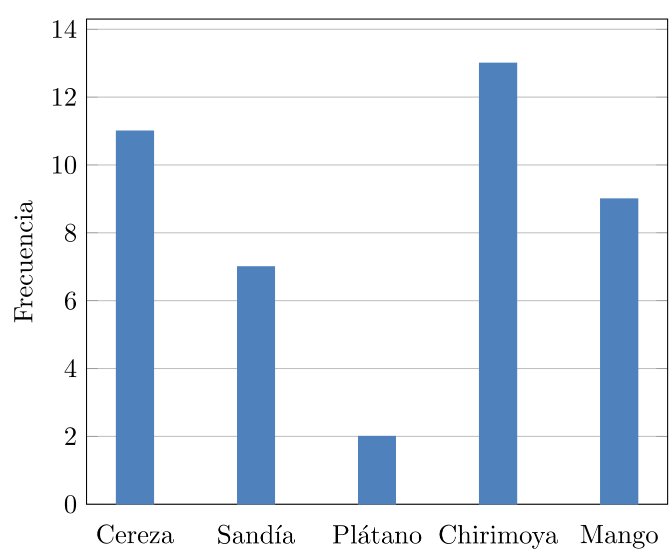
Un gráfico de barra se utiliza para mostrar de forma visual las categorías de una variable cualitativa. Se construyen considerando tantas barras como categorías tenga la variable cualitativa en cuestión. Las barras deben tener igual ancho y la altura de cada una debe ser proporcional a la frecuencia de cada categoría.

Ejemplo 8.2.1

En un curso de 42 alumnos se realizó una encuesta para conocer la fruta favorita de cada estudiante. Los resultados de la encuesta se resumen en la siguiente tabla.

Fruta	**Frecuencia**
Cereza	11
Sandía	7
Plátano	2
Chirimoya	13
Mango	9

Esta tabla describe la variable cualitativa "Fruta", que tiene cinco categorías: Cereza, Sandía, Plátano, Chirimoya y Mango. Cada una de las cinco categorías tiene asociado un número (la frecuencia absoluta), que corresponde a la cantidad de personas que indicó que le gustaba la fruta de la categoría. A partir de esta tabla se puede construir un gráfico de barras:



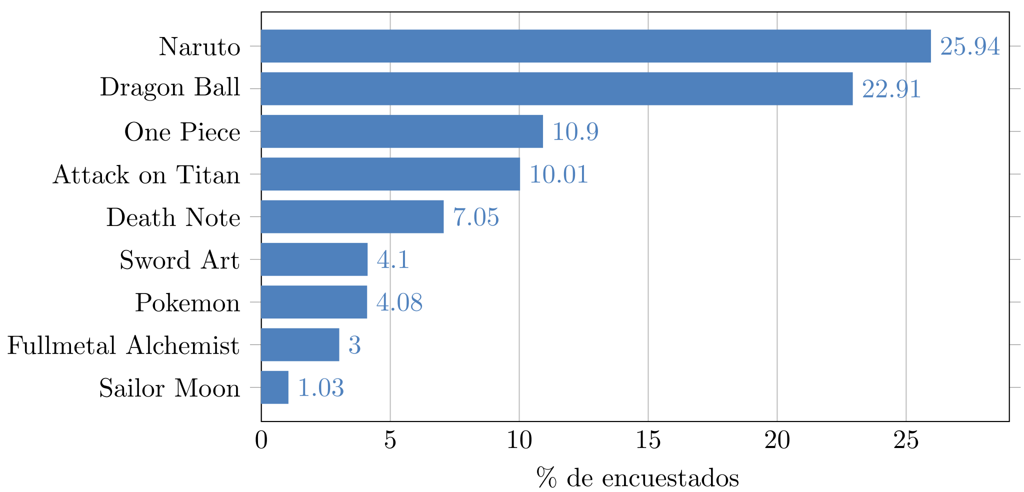
Observamos que hay cinco barras equidistantes de igual ancho (una por cada categoría). La altura de las barras es proporcional a la frecuencia absoluta. Notemos que también se puede graficar la frecuencia relativa. En ambos casos, la forma de la figura se mantiene intacta. El orden en que se grafican las categorías es arbitrario.

¿Para qué sirve el gráfico anterior?

Aunque no reemplaza la información original, el gráfico anterior muestra de forma visual la frecuencia de cada categoría. Esto, en muchos casos, facilita el análisis y la interpretación pues el valor de cada categoría es proporcional a la altura de la barra. Por ejemplo, a simple vista vemos que la fruta más popular es la chirimoya y la menos popular es el plátano. El gráfico también muestra que la cereza es bastante apetecida.

Ejemplo 8.2.2

En el año 2021 se realizó una encuesta online para establecer un ranking de los animés más populares de la historia. Los resultados de la encuesta se presentan en el siguiente gráfico de barras:



Este gráfico nos entrega la frecuencia relativa (% de encuestados) asociada a cada categoría de la variable cualitativa "animés". No se conoce la cantidad de personas que participaron en la encuesta, pues el interés del gráfico es establecer un ranking de los animés, es decir, ordenarlos de mayor a menor popularidad.

A diferencia del Ejemplo 8.2.1, el gráfico está orientado horizontalmente y se agregó el valor de la frecuencia relativa asociada a cada barra. Las categorías fueron ordenadas según popularidad.

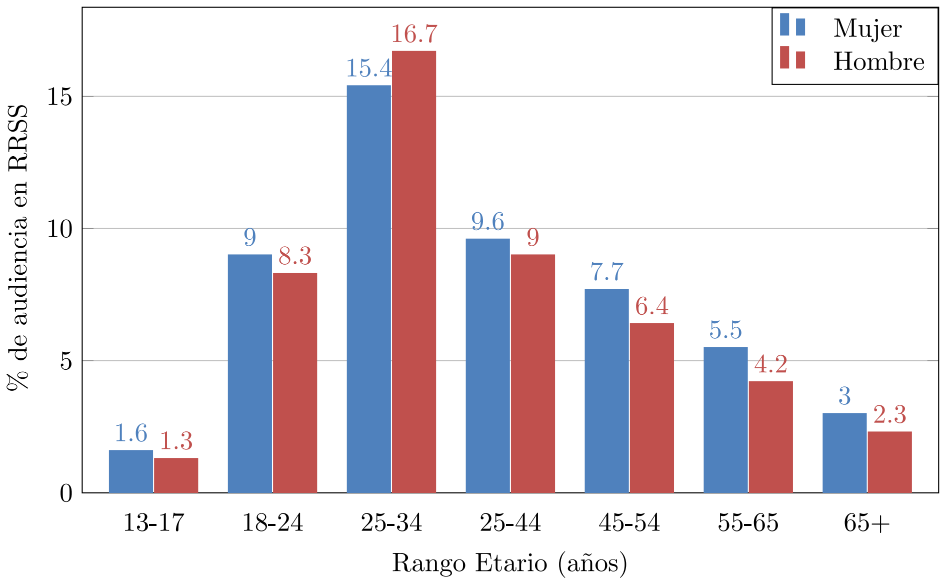
Podemos observar que más de un cuarto de los encuestados prefiere a Naruto y un poco menos de un cuarto prefiere a Dragon Ball, siento estas las series mas populares.

Hasta ahora hemos construido gráficos de barras para una sola variable categórica. La extensión a dos o más variables se realiza a través de los llamados *gráficos de barras agrupadas*. En estos gráficos las barras se colocan "lado a lado" para poder hacer comparaciones más fácilmente.

Ejemplo 8.2.3

El siguiente gráfico muestra el porcentaje de la audiencia de redes sociales presente en las plataformas de anuncios de Facebook, Instagram y Facebook Messenger durante enero de 2021, por edad y sexo[a].

% de audiencia de anuncios publicitarios en RRSS en Chile (Enero 2021)



Este gráfico nos indica, por ejemplo, que las mujeres en el rango 18-24 años consumen 15.4 % de los anuncios, mientras que los hombres en ese mismo rango consumen 16.7 % de los anuncios. Además, observamos que las personas que consumen anuncios en RRSS se concentran en rangos etarios asociados a adultos y adultos jóvenes. La frecuencia es menor en rangos etarios menores y mayores a estos. Finalmente, al sumar los valores asociados a las barras del mismo color, obtenemos que las mujeres consumen un 51.8 % de los anuncios, mientras que los hombres consumen un 48.2 % de los anuncios.

[a]Información obtenida del *Digital 2021 Global Overview Report*. https://datareportal.com/reports/digital-2021-chile.

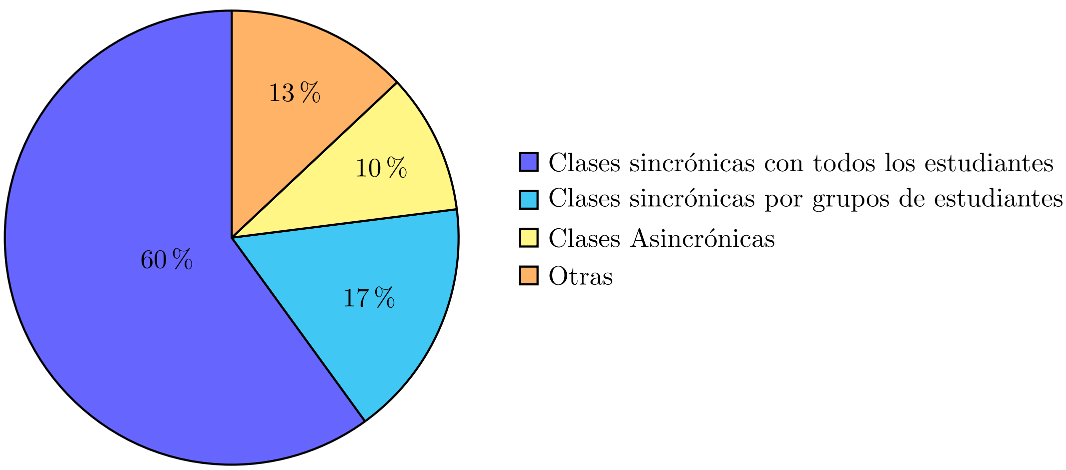
Observación 8.2.1. *Tal como se muestra en los ejemplos anteriores, existen diferentes características a tener en cuenta al momento de construir un gráfico de barras: ancho, color y orientación de las barras, orden de presentación de las categorías, uso de etiquetas, título, etc. Además, es fundamental siempre usar etiquetas en los ejes y verificar que el gráfico sea claro. También el uso de un título y de etiquetas dentro del gráfico puede ser necesario para que las personas puedan comprender la información presentada. Es importante enfatizar que el objetivo de un gráfico de barras es entregar la información de manera visual sin distorsionarla. Así, es recomendable no utilizar efectos ni adornos innecesarios en el gráfico que puedan generar errores de interpretación.*

8.2.2. Gráfico circular o de torta

Un gráfico circular o de torta es una representación visual que permite representar frecuencias relativas porcentuales de las categorías de la variable de interés. Los datos se representan mediante sectores de un círculo, cuyos ángulos o áreas son proporcionales a las frecuencias de las categorías que representan. De este modo, un gráfico circular permite comparar fácilmente los porcentajes de cada una de las categorías a través de la comparación visual de las áreas de las sectores. Además, dado que las cantidades expresadas en un gráfico circular son porcentajes, éstas siempre deben sumar 100.

Ejemplo 8.2.4

Entre el 13 de abril y el 14 de mayo de 2020 se realizó una encuesta para conocer el tipo de modalidad implementada en las clases online durante 2020. En el estudio participaron 1438 docentes y profesionales de la educación. Los resultados de la encuesta se visualizan en el próximo gráfico circular:

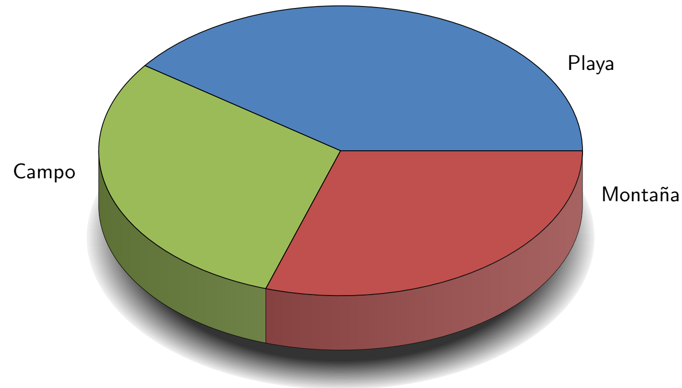


El gráfico muestra la frecuencia relativa (% de docentes) de cada una de las modalidades de clases online. Para mayor claridad se agregaron las etiquetas de cada frecuencia relativa. A partir de este gráfico se puede concluir que el 77 % de los docentes está realizando clases sincrónicas. Además, un 13 % de los docentes encuestados no realiza ni clases sincrónicas y asincrónicas.

La importancia del gráfico circular se debe a su familiaridad y popularidad. Sin embargo, debemos ser muy cuidadosos al momento de construirlos. Por ejemplo, si la variable tiene muchas categorías es posible que el gráfico sea ilegible y no entregue correctamente la información. En este caso, es preferible utilizar otra representación o bien trabajar con los datos directamente. También hay que evitar el uso de efectos o adornos innecesarios que puedan distorsionar la visualización de la información.

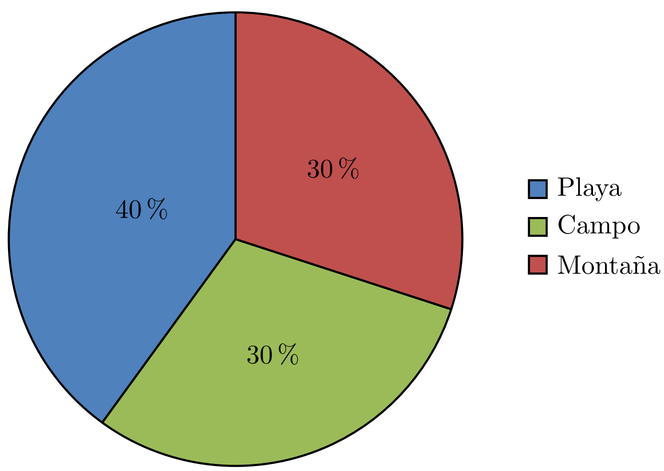
Ejemplo 8.2.5

El siguiente gráfico representa las preferencias de los estudiantes de un curso respecto a su lugar favorito para vacacionar.



Aunque es bastante llamativo, este gráfico no es informativo y no permite analizar las preferencias para vacacionar. Por ejemplo, no permite distinguir si hay mas preferencias por asistir a la montaña o al campo. Además, muestra que hay más preferencias por ir a la playa, aunque no es posible comparar con las otras preferencias.

En este caso, es recomendable no utilizar el efecto tridimensional y agregar el porcentaje asociado a cada sector del gráfico. Así, una versión mejorada del gráfico anterior es el siguiente:



8.2.3. Gráficos de dispersión

Un gráfico de dispersión es una representación que nos permite visualizar la relación entre dos variables cuantitativas. Los datos se presentan en el plano cartesiano, donde cada variable es representada por un eje cartesiano. El eje horizontal es conocido como eje "x" y el eje vertical como eje "y".

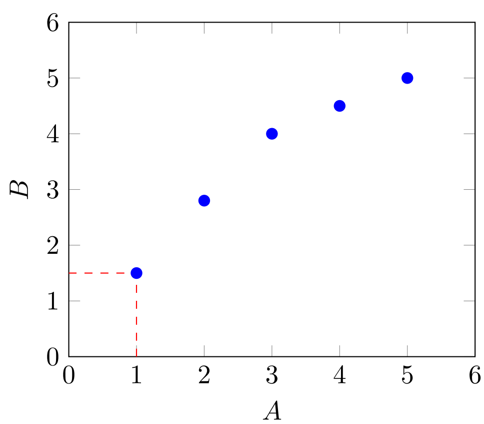
Para realizar un gráfico de dispersión se reúnen los valores de las variables en una tabla de doble entrada. Luego, se elige un eje para cada variable. La variable asociada al eje x se dirá *variable independiente* y la variable asociada al eje y se dirá *variable dependiente*. Después, se generan pares ordenados con los valores de la variable independiente y la variable dependiente y se marcan en el plano cartesiano. Finalmente, se agregan etiquetas a los ejes y un título adecuado al gráfico.

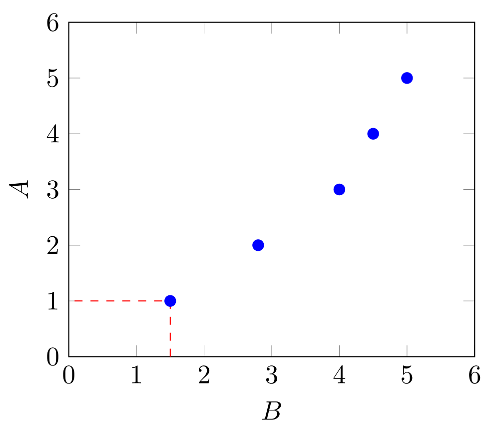
Ejemplo 8.2.6

Supongamos que disponemos del siguiente conjunto de datos correspondientes a las variables cuantitativas A y B.

Variable A	**Variable B**
1	1.5
2	2.5
3	4
4	4.5
5	6

Para relacionar ambas variables podemos realizar un gráfico de dispersión. Sin embargo, ¿cómo elegir las variables independiente y dependiente?
Aunque podemos realizar un gráfico por cada variable, en el que cada variable es la variable independiente, es necesario presentar solamente uno de estos gráficos.





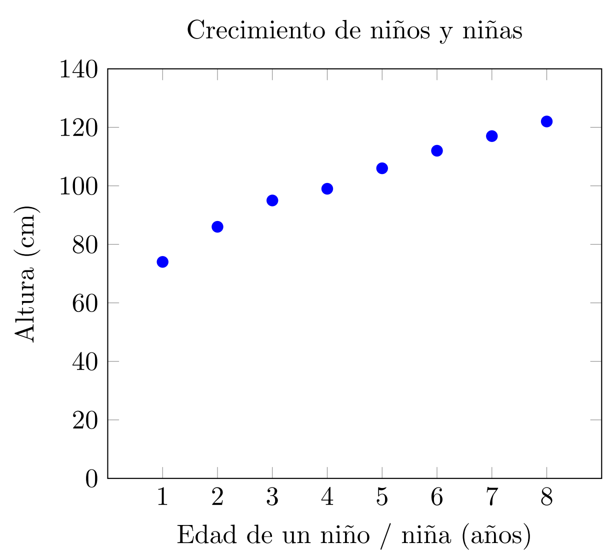
Esto se debe a que las variables no necesariamente son simétricas y, generalmente, una variable incide sobre la otra y no al revés. Así, para elegir correctamente el rol de cada variable es importante considerar qué representa cada variable, cómo se relacionan entre sí y qué información se quiere transmitir con el gráfico. Por ejemplo, si A representa el número de tazas de café que consume una persona y B corresponde al nivel de cafeína en la sangre, tiene más sentido utilizar a la variable A como variable independiente, pues es razonable pensar que el número de tazas de café impacta en el nivel de cafeína en sangre y no viceversa.

Ejemplo 8.2.7

La siguiente tabla presenta la estatura promedio de niñas entre 1 y 8 años en la región de O'Higgins.

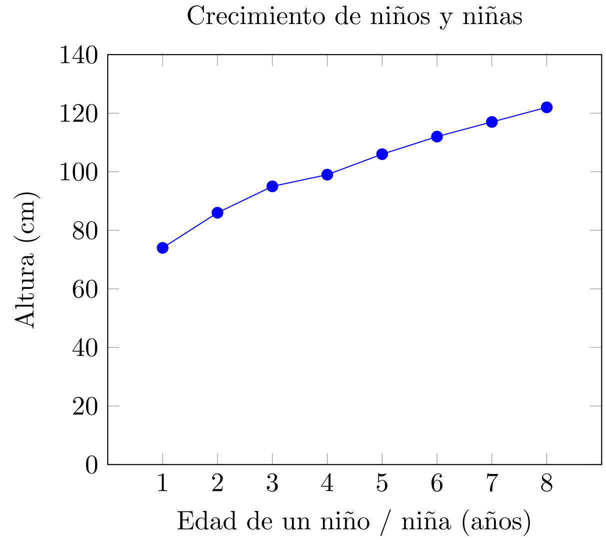
Edad (años)	**Altura (cm)**
1	74
2	86
3	95
4	99
5	106
6	112
7	117
8	122

Podemos realizar un gráfico de dispersión considerando a la "Edad" como la variable independiente y a la "Altura" como la variable independiente.



Este tipo de gráficos se denominan *curvas de crecimiento* y son bastante utilizado por pediatras para determinar el correcto crecimiento de los niños y niñas.

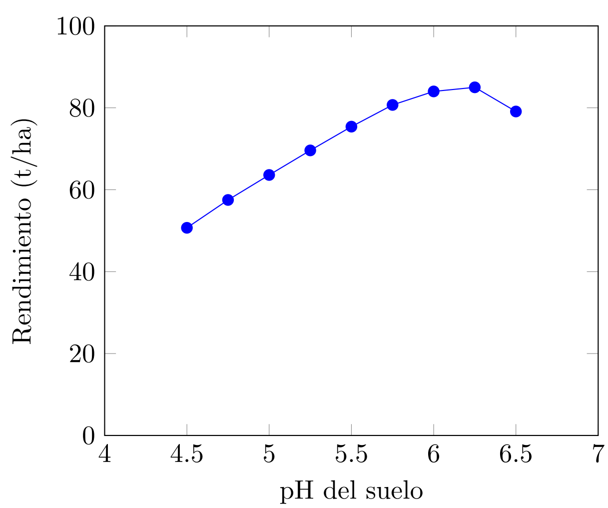
En casos donde se estudia, por ejemplo, una evolución temporal tiene sentido agregar una línea entre los puntos para ayudar el análisis de la tendencia de los datos.



Por ejemplo, al agregar las líneas entre puntos en el gráfico de crecimiento de niños y niñas vemos, por ejemplo, que la menor tasa de crecimiento ocurre entre los 3 y 4 años.

Ejemplo 8.2.8

Un agricultor observó que la acidez del suelo (pH) incidía en el rendimiento (cantidad de fruta cosechada en toneladas por hectárea) de sus naranjos. Luego de realizar varios experimentos, modificando la acidez del suelo, obtuvo el siguiente gráfico de dispersión.



Podemos observar que el rendimiento alcanza su valor máximo cuando el pH es aproximadamente 6.25. Así, al agricultor le conviene mantener el pH del suelo en torno al valor 6.25.

Observación 8.2.2. *Los gráficos de dispersión son especialmente útiles cuando se quieren relacionar variables cuantitativas con una gran cantidad de datos.*

8.3 Errores conceptuales comunes

Es importante tener en cuenta que cualquiera que sea la representación utilizada, esta debe ser integral, en el sentido que no debe distorsionar la información y debe ser construida de modo que favorezca la correcta interpretación de los datos.

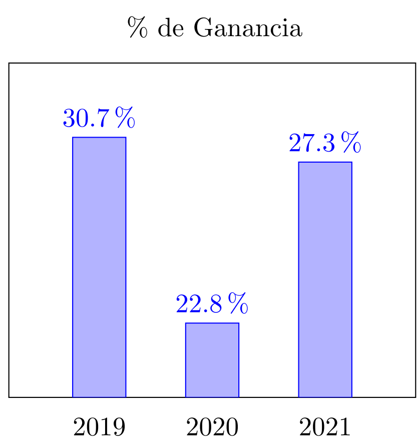
Los elementos del gráfico tales como título, etiquetas de los ejes, escalas, etc. deben proporcionar todos los elementos para comprender las relaciones representadas. Además, se debe evitar usar adornos o efectos innecesarios.

Existen ocasiones en que los gráficos (por omisión o mala intención) son distorsionados para cumplir un fin específico. Es por esto que es importante analizar los gráficos con cautela. Si un gráfico no está correctamente construido, éste debe ser corregido o bien se debe acudir a la información cruda.

A continuación presentamos dos situaciones en las que los gráficos no han sido correctamente construidos.

Ejemplo 8.3.1

El siguiente gráfico muestra el % de ganancia anual de una empresa durante los años 2019, 2020 y 2021.

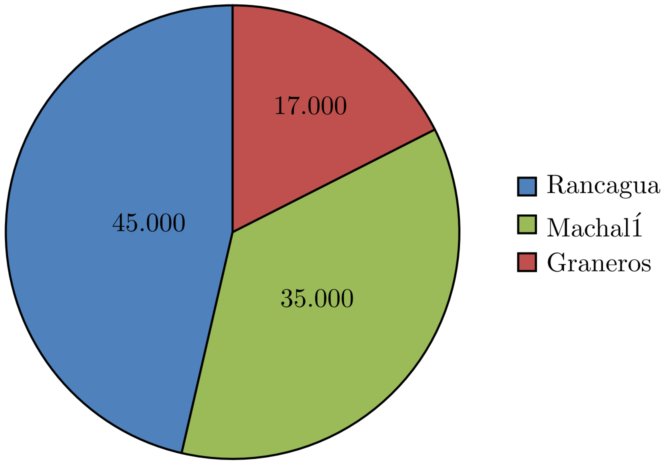


¿Está correctamente construido este gráfico?

Al analizar el gráfico vemos que las barras tienen el mismo ancho y están a igual distancia. Sin embargo, no está correctamente etiquetado y la altura de las barras no es proporcional. En efecto, la altura de la barra del año 2020 es menos de la mitad de la altura de las otras barra, mientras que las ganancias representadas son relativamente similares. Por la razón que sea, el gráfico sugiere que el año 2020 la ganancia fue mucho menor que los otro años.

Ejemplo 8.3.2

El siguiente gráfico muestra los resultados obtenidos por cierto partido político en la última elección de alcaldes para tres comunas.

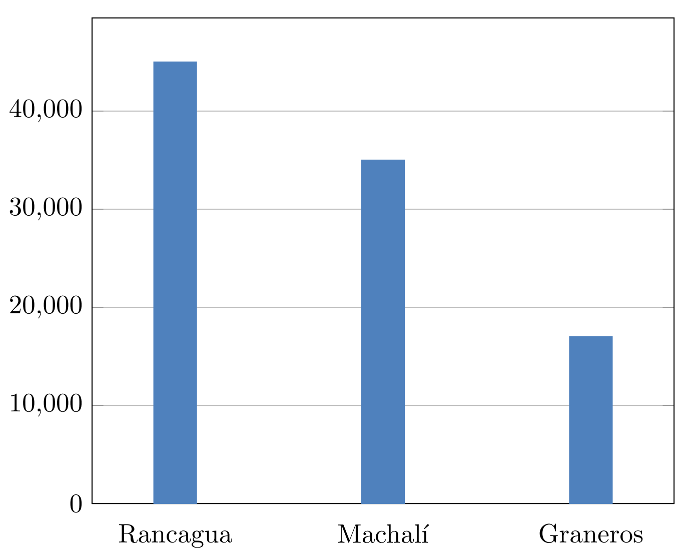


A partir del gráfico se infiere que el partido obtuvo 45.000 votos en Rancagua, 35.000 votos en Machalí y 17.000 en Graneros.

¿Es pertinente este gráfico?

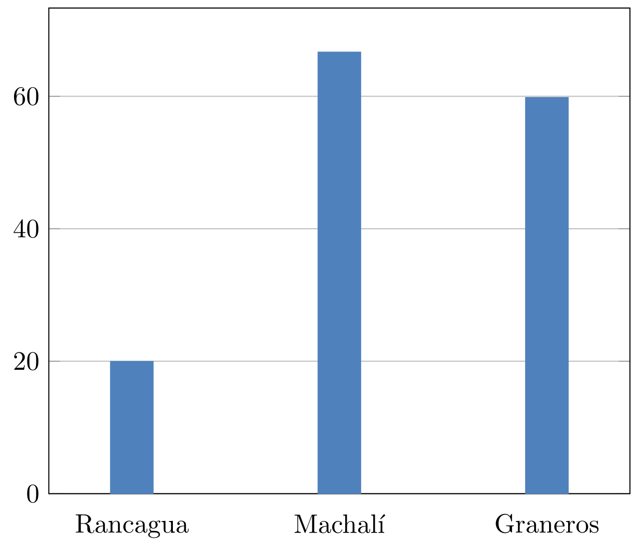
Desafortunadamente no. Esto pues un gráfico circular se construye a partir de frecuencias relativas respecto a un todo. Como son votaciones para comunas diferentes, no se puede hablar de un todo. Lo más correcto es utilizar un gráfico de barras.

Cantidad de votos obtenidos por el partido



Este gráfico muestra la cantidad de votos por comuna. Se observa que la mayor cantidad de votos proviene de Rancagua. Sin embargo, este gráfico no da cuenta del impacto del partido en cada comuna. Para solucionar este problema, se puede graficar el porcentaje de votos obtenido por el partido, como se muestra en el siguiente gráfico[a].

% de votos obtenidos por el partido



Este gráfico muestra que el partido tiene poco impacto en Rancagua, a diferencia de lo que ocurre en Machalí o Graneros.

[a]Se considera que que en Rancagua votan 225.563 personas, en Machalí 52505 y en Graneros 28.428.

Ejercicios Capítulo 7

P1. Maximiliano anotó los pasos que realizó durante la semana:

Día	Lun.	Mar.	Mi.	Ju.	Vi.	Sá.
Pasos	9288	8262	8829	8712	9153	8874

¿Cuántos pasos debe realizar para que su promedio semanal sea superior a 9000 pasos?

P2. Considere la temperatura bimestral de dos ciudades:

Mes	Temp. (°C) Ciudad 1	Temp. (°C) Ciudad 2
Ene-Feb	22,4	25,3
Mar-Abril	22,3	24,5
May-Jun	20,3	18,7
Jul-Ago	21,8	15,7
Sep-Oct	23,1	22,3
Nov-Dic	22,1	25,5

a) Calcule la temperatura promedio anual para cada ciudad.

b) En base a los resultados del inciso anterior, ¿cree usted que la temperatura promedio anual es un buen indicador del clima de una ciudad?

P3. La estatura media de un curso de 25 estudiantes es de 130 cm.

a) Explique cómo se calcula la estatura media del curso.

b) Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

1) Si uno de los estudiantes mide 132 cm, debe haber un estudiante que mida 128 cm.
2) La estatura de la mayoría de los estudiantes es de 130 cm.
3) Si se ordenan desde el más bajo al más alto, entonces la estatura del estudiante que ocupa la posición central es igual a 130 cm.
4) La mitad de los estudiantes debe medir menos de 130 cm, y la otra mitad debe medir más de 130 cm.

c) Se anotó mal la estatura de un estudiante resultando que medía 120 cm en lugar de 145 cm. ¿Cuál es la estatura media correcta del curso?

P4. En el colegio de Daniela, su profesora de ciencias les hace pruebas que se evalúan de 1 a 7. Daniela tiene un promedio 5,6 en sus primeras cuatro pruebas de ciencias. Si en la quinta prueba obtuvo un 6,1 ¿Cuál es el promedio de notas de Daniela en Ciencias después de las cinco pruebas?

P5. ¿Es posible afirmar que en una reunión de 38 personas haya al menos 4 que nacieron en el mismo mes? ¿cuántas personas se deberían reunir para que haya al menos 3 que nacieron el mismo día?

Bibliografía

[1] Araneda, A. M., Chandía, E., and Sorto, M. A. *Datos y azar : para futuros profesores de educación básica*. Ediciones SM Chile S.A., Santiago, Chile, 2013.

[2] Brahier, D. J. *Teaching secondary and middle school mathematics*. Routledge, London, 2020.

[3] Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., and Zanocco, P. *Números : para futuros profesores de educación básica*. Ediciones SM Chile S.A., Santiago, Chile, 2013.

[4] Martínez, S., and Varas, M. L. *Álgebra : para futuros profesores de educación básica*. Ediciones SM Chile S.A., Santiago, Chile, 2013.

[5] Reyes, C., Dissett, L., and Gormaz, R. *Geometría : para futuros profesores de educación básica*. Ediciones SM Chile S.A., Santiago, Chile, 2013.

[6] Van De Walle, J. A., Karp, K. S., and Bay-Williams, J. M. *Elementary and middle school mathematics : Teaching Developmentally*. Pearson, NY, NY, 2019.